Maturalna otwarta pracownia

27.09.2023r

Przekształcenia wykresów funkcji

Symetria względem Ox

1. Naszkicuj na jednym rysunku wykresy funkcji f_1, oraz f_2, jeśli:

1.1. $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = -x^2$
1.2. $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = -\sqrt{x}$
1.3. $f_1(x) = \frac{4}{x}$, $f_2(x) = -\frac{4}{x}$
1.4. $f_1(x) = 2x - 4$, $f_2(x) = -2x + 4$
1.5. $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = -x^3$
1.6. $f_1(x) = |x|$, $f_2(x) = -|x|$
1.7. $f_1(x) = x - 3$, $f_2(x) = 3 - x$
1.8. $f_1(x) = [x]$, $f_2(x) = -[x]$
1.9. $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = -2^x$
1.10. $f_1(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$, $f_2(x) = -\left(\frac{1}{4}\right)^x$
1.11. $f_1(x) = \log_2 x$, $f_2(x) = -\log_2 x$
1.12. $f_1(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$, $f_2(x) = -\log_{\frac{1}{3}} x$

Symetria względem Oy

2. Naszkicuj na jednym rysunku wykresy funkcji f_1, oraz f_2, jeśli:

2.1. $f_1(x) = x - 2$, $f_2(x) = -x - 2$
2.2. $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = (-x)^2$
2.3. $f_1(x) = \frac{4}{x}$, $f_2(x) = -\frac{4}{x}$
2.4. $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = (-x)^3$
2.5. $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = \sqrt{-x}$
2.6. $f_1(x) = 2x + 4$, $f_2(x) = -2x + 4$
2.7. $f_1(x) = |x|$, $f_2(x) = |-x|$
2.8. $f_1(x) = 2x$, $f_2(x) = 2(-x)$
2.9. $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 2^{-x}$
2.10. $f_1(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$, $f_2(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{-x}$
2.11. $f_1(x) = \log_2 x$, $f_2(x) = \log_2(-x)$
2.12. $f_1(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$, $f_2(x) = \log_{\frac{1}{3}} -x$

Translacja o wektor

3. Wykres funkcji f_2 powstaje poprzez translację o wektor $\overrightarrow{u}$ wykresu funkcji f_1. Zapisz wzór funkcji f_2, następnie naszkicuj na jednym rysunku wykresy funkcji f_1, oraz f_2, jeśli:

3.1. $f_1(x) = x^2$, $\overrightarrow{u} = [4, -1]$
3.2. $f_1(x) = x^2$, $\overrightarrow{u} = [2, -4]$
3.3. $f_1(x) = 2x$, $\overrightarrow{u} = [2, 4]$
3.4. $f_1(x) = 2x$, $\overrightarrow{u} = [1, -2]$
3.5. $f_1(x) = \frac{2}{x}$, $\overrightarrow{u} = [-1, -2]$
3.6. $f_1(x) = \frac{4}{x}$, $\overrightarrow{u} = [2, 3]$
3.7. $f_1(x) = 2^x$, $\overrightarrow{u} = [-1, -2]$
3.8. $f_1(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $\overrightarrow{u} = [2, -3]$

4. Wykres funkcji f_2 powstaje poprzez translację o wektor $\overrightarrow{u}$ wykresu funkcji f_1. Zapisz współrzędne wektora $\overrightarrow{u}$, następnie naszkicuj na jednym rysunku wykresy funkcji f_1, oraz f_2, jeśli:

4.1. $f_1(x) = 2x$, $f_2(x) = 2x - 4$
4.2. $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = (x-1)^2 - 4$
4.3. $f_1(x) = \frac{4}{x}$, $f_2(x) = \frac{4}{x-1} + 2$
4.4. $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = (x+2)^3 + 1$
4.5. $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = \sqrt{x-4} - 2$
4.6. $f_1(x) = \sqrt{2x}$, $f_2(x) = \sqrt{2x+4} - 1$
4.7. $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = (x+3)^2 + 3$
4.8. $f_1(x) = \frac{2}{x}$, $f_2(x) = \frac{2}{x+1} - 4$

Symetria częściowa Ox

5. Naszkicuj na jednym rysunku wykresy funkcji f_1, oraz f_2, jeśli:

5.1. $f_1(x) = x^2 - 4$, $f_2(x) = \left|x^2 - 4\right|$
5.2. $f_1(x) = 2x - 4$, $f_2(x) = |2x - 4|$
5.3. $f_1(x) = \sqrt{x-2} - 2$, $f_2(x) = \left|\sqrt{x-2} - 2\right|$
5.4. $f_1(x) = \frac{4}{x-2} + 2$, $f_2(x) = \left|\frac{4}{x-2} + 2\right|$
5.5. $f_1(x) = 2^{x+3} - 4$, $f_2(x) = \left|2^{x+3} - 4\right|$
5.6. $f_1(x) = \log_2(x+4) + 2$, $f_2(x) = \left|\log_2(x+4) + 2\right|$
5.7. $f_1(x) = x^3 + 1$, $f_2(x) = \left|x^3 + 1\right|$
5.8. $f_1(x) = 3^x + 2$, $f_2(x) = |3^x + 2|$

Symetria częściowa Oy

6. Naszkicuj na jednym rysunku wykresy funkcji f_1, oraz f_2, jeśli:

6.1. $f_1(x) = 2x - 4$, $f_2(x) = 2|x| - 4$
6.2. $f_1(x) = \sqrt{x+2} + 1$, $f_2(x) = \sqrt{|x|+2} + 1$
6.3. $f_1(x) = \frac{3}{x+1} + 2$, $f_2(x) = \frac{3}{|x|+1} + 2$
6.4. $f_1(x) = 4^{x-1} - 2$, $f_2(x) = 4^{|x|-1} - 2$
6.5. $f_1(x) = \sqrt{x-3} - 2$, $f_2(x) = \sqrt{|x|-3} - 2$
6.6. $f_1(x) = \log_2(x-1) - 2$, $f_2(x) = \log_2(|x|-1) - 2$
6.7. $f_1(x) = x^3 - 1$, $f_2(x) = |x|^3 - 1$
6.8. $f_1(x) = \frac{-2}{x-2} - 2$, $f_2(x) = \frac{-2}{|x|-2} - 2$

Powinowactwo prostokątne o osi Ox

7. Naszkicuj na jednym rysunku wykresy funkcji f_1, oraz f_2, jeśli:

7.1. $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = 2\sqrt{x}$
7.2. $f_1(x) = x - 2$, $f_2(x) = -2(x-2)$
7.3. $f_1(x) = \frac{1}{x-2} + 1$, $f_2(x) = \frac{2}{x-2} + 2$
7.4. $f_1(x) = x^2 - 1$, $f_2(x) = -2(x^2 - 1)$
7.5. $f_1(x) = 2^{x-1} - 1$, $f_2(x) = 2(2^{x-1} - 1)$
7.6. $f_1(x) = x - 3$, $f_2(x) = 6 - 2x$
7.7. $f_1(x) = |x-1| - 1$, $f_2(x) = 2|x-1| - 2$
7.8. $f_1(x) = \sqrt{x-2} - 2$, $f_2(x) = -2\sqrt{x-2} + 4$

Powinowactwo prostokątne o osi Oy

8. Naszkicuj na jednym rysunku wykresy funkcji f_1, oraz f_2, jeśli:

8.1. $f_1(x) = x - 2$, $f_2(x) = 2x - 2$
8.2. $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = \sqrt{2x}$
8.3. $f_1(x) = x - 3$, $f_2(x) = -3x - 3$
8.4. $f_1(x) = \frac{3}{x} - 1$, $f_2(x) = \frac{1}{x} - 1$
8.5. $f_1(x) = x^2 - 4$, $f_2(x) = 4x^2 - 4$
8.6. $f_1(x) = 2^{x-2} - 2$, $f_2(x) = 2^{2x-2} - 2$
8.7. $f_1(x) = \sqrt{x+4} - 2$, $f_2(x) = \sqrt{-2x+4} - 2$
8.8. $f_1(x) = (x-4)^2 - 9$, $f_2(x) = (2x-4)^2 - 9$

Złożenie przekształceń

9. Wykres funkcji f_2 powstał w wyniku przekształceń wykresu funkcji f_1. Zapisz ciąg przekształceń, sporządź szkic funkcji f_2 jeśli:

9.1. $f_1(x) = x$, $f_2(x) = ||x+2|-1|$

9.2. $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = -(x-2)^2+4$

9.3. $f_1(x) = \frac{1}{x}$, $f_2(x) = |\frac{2}{x+2} - 2|$

9.4. $f_1(x) = 3^x$, $f_2(x) = 3^{x-2} - 3$

9.5. $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = -2^{1-x} + 1$

9.6. $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = |2^{x-3} - 4|$

9.7. $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = |\sqrt{x-2} - 4|$

9.8. $f_1(x) = x$, $f_2(x) = |(|x|+3)^2 - 1|$

9.9. $f_1(x) = x$, $f_2(x) = |2-|x-4||$

9.10. $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 2^{|x-2|-2} + 1$

9.11. $f_1(x) = \frac{1}{x}$, $f_2(x) = |\frac{2}{1-|x-2|} - 3|$

9.12. $f_1(x) = \frac{1}{x}$, $f_2(x) = \frac{3}{1-|x+2|} + 3$

9.13. $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = \left|-\sqrt{2-|x|}+3\right|$

9.14. $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = |1-\sqrt{-x}|$

9.15. $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = \sqrt{|2x-3|} - 2$

9.16. $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = (|x|-3)^2 - 2$

9.17. $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = \sqrt{|x|-1}$

9.18. $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = \left|4-2(x-1)^2\right| - 3$

9.19. $f_1(x) = \frac{1}{x}$, $f_2(x) = \frac{2}{|x|-1}$

9.20. $f_1(x) = \frac{1}{x}$, $f_2(x) = \left|\frac{1}{x-1} - 2\right|$

04.10.2023r

10. Dla jakich wartości parametru $m, m \in \mathbb{R}$ równanie $x^2 - |2x - 8| = m$ ma dwa pierwiastki różnych znaków?
11. Rozwiąż nierówność $|x^2 - 5x - 6| + |x - 6| \geq 2|12 - 2x|$.
12. Rozwiąż nierówność $|2x^2 + 7x - 11| < x^2 + x + 3$
13. Rozwiąż nierówność $\sqrt{(x^2 - |x| - 2)^2} > 2$.
14. Wykaż, że dla $x > 0$ prawdziwa jest nierówność $20x^2 + 2x + 5 \geq 22x$.
15. Wykaż, że liczba $\sqrt{12 + 6\sqrt{3}} + \sqrt{12 - 6\sqrt{3}}$ jest całkowita.
16. Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$ liczba $x = 5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ jest podzielna przez 19.
17. Wykaż, za pomocą indukcji matematycznej, równość

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

18. Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $n^3 + 5n$ jest podzielna przez 6.
19. Wykaż, że dla dowolnej liczby pierwszej $p, p > 5$ liczba $p^2 + 11$ jest podzielna przez 12.

11.10.2023r

20. Wyznacz wszystkie wartości parametru $m, m \in \mathbb{R}$, dla których funkcja $f(x) = (m^2 - 9)x^2 - 2(m - 3)x - 3$ przyjmuje wartości ujemne dla każdej liczby rzeczywistej x.
21. Wyznacz wszystkie wartości parametru $m, m \in \mathbb{R}$, dla których funkcja $f(x) = x^2 + (2m+3)x + m^2 + 3m$ będzie miała dwa różne miejsca zerowe, z których jedno będzie mniejsze od 2, zaś drugie większe od $\frac{7}{3}$.
22. Ustal, dla jakich wartości parametru $m, m \in \mathbb{R}$ równanie $x^2 + 2(m+1)x + m + 2 = 0$ ma dwa różne rozwiązania x_1, x_2 takie, że $|x_1| + |x_2| < 2\sqrt{11}$.
23. Wyznacz wszystkie wartości parametru $m \in \mathbb{R}$ dla których zbiór rozwiązań nierówności $|x^2 - 4x + 3| \leq x - m$ jest jednoelementowy.
24. Wyznacz wszystkie wartości rzeczywistego parametru m, dla których zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{x - m^2 - 2m + 1}{m^2 - 2 - x} > 0$ jest przedział $(2; 7)$.
25. Dla jakich wartości parametru m równanie $2x^2 - (m-1)x + m + 1 = 0$ ma różne pierwiastki rzeczywiste spełniające warunek $|x_2 - x_1| = 1$?
26. Rozwiąż równanie $\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}} = 1$.
27. Rozwiąż nierówność $|x - 2| - |x - 1| \leq |x + 1| - 5$
28. Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej n, liczba $n^5 - n$ jest podzielna przez 30.
29. Dla jakich wartości parametru $m \in \mathbb{R}$ rozwiązanie (x, y) układu równań

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 4x + my = 2m \end{cases}$$

należy do I ćwiartki układu współrzędnych?

18.10.2023r

30. Dane jest równanie $(2m-1)x^2-2x+m=0$, gdzie $m\in\mathbb{R}$. Dla jakich wartości parametru m równanie ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste których suma odwrotności jest równa $\frac{8}{3}m$?
31. Rozwiąż nierówność $|2x+2|+|x-2|>5$.
32. Ustal, dla jakich wartości parametru $m\in\mathbb{R}$ dwa różne pierwiastki x_1, x_2 równania $x^2-4(m+1)x+2m^2-2m=0$ spełniają warunek $x_1<m<x_2$.
33. Wykaż, że dla dowolnej liczby $m\in\mathbb{Z}$, wartość wyrażenia $m^6-2m^4+m^2$ jest liczbą podzielną przez 36.
34. Liczby x_1 oraz x_2 są różnymi pierwiastkami równania kwadratowego $(m-2)x^2-2x+1=0$. Narysuj wykres funkcji $f(m)=|x_1+x_2+x_1\cdot x_2|$.
35. Znaleźć maksimum funkcji $f(x)=\frac{2}{\sqrt{2x^2-4x+3}}$. Wyznaczyć zbiór wartości funkcji f.
36. Udowodnij, że wielomian $W(x)=x^8+x^6-4x^4+x^2+2$ nie ma pierwiastków rzeczywistych.
37. Wyznacz wartość parametrów a,b tak, aby wielomian $x^4-3x^3+6x^2+ax+b$ był podzielny przez x^2-1. Dla wyznaczonych wartości parametrów oblicz wszystkie pierwiastki tego wielomianu.
38. Wykresy funkcji kwadratowych $f(x)=3x^2-2mx-m$, oraz $g(x)=mx^2+x+3$, dla $m\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ przecinają się w dwóch punktach. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których iloraz sumy odciętych tych punktów przez ich sumę jest o $\frac{1}{8}$ mniejszy od największej wartości funkcji g.
39. Wykaż, że jeśli $mp=2(n+q)$ to chociaż jedno z równań $x^2+mx+n=0$, $x^2+px+q=0$ ma rozwiązanie.

25.10.2023r

40. (4 pkt) Rozwiąż nierówność $|2x-5|-|x+4| \leq 2-2x$.
41. (3 pkt) Wyznacz wszystkie wartości parametru a, dla których równanie

$$|x-4| = (a-1)^2 - 5$$

ma dwa rozwiązania różnych znaków.

42. (4 pkt) Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których jedynym rozwiązaniem rzeczywistym równania $x^3 + m^3x^2 - m^2x - 1 = 0$ jest liczba 1.
43. (5 pkt) Pierwiastkiem wielomianu $W(x) = 2x^3-(3m-1)x^2+7x-m$ jest liczba -1. Wyznacz wartość parametru m oraz pozostałe pierwiastki tego wielomianu. Rozwiąż nierówność $W(x) < 0$.
44. (3 pkt) Przedstaw wielomian $W(x) = x^4-2x^3-3x^2+4x-1$ w postaci iloczynu dwóch wielomianów stopnia drugiego o współczynnikach całkowitych i takich, że współczynniki przy drugich potęgach są równe jeden.
45. (4 pkt) Reszta z dzielenia wielomianu

$$W(x) = 4x^3 - 6x^2 - (5m+1)x - 2m$$

przez dwumian $x+2$ jest równa (-30). Oblicz m i dla wyznaczonej wartości m rozwiąż nierówność $W(x) \geq 0$.

46. (5 pkt) Sporządź wykres funkcji $f(x) = |x^2 - 2x - 8|$, a następnie korzystając z tego wykresu, wyznacz wszystkie wartości parametru k, dla których równanie $f(x) = k$, ma dwa rozwiązania, których iloczyn jest liczbą ujemną.
47. (3 pkt) Rozwiąż nierówność:

$$\frac{2x+1}{-x} \leq \frac{4+2x}{5x+5}.$$

48. (4 pkt) Wyznacz całkowite wartości parametru a, dla których równanie

$$(a-1)x^2 - (a^2+1)x + a^2 + a = 0$$

ma pierwiastki całkowite.

49. (4 pkt) Dla jakich całkowitych wartości parametrów a, b liczba $1+\sqrt{3}$ jest pierwiastkiem wielomianu $3x^3 + ax^2 + bx + 12$.
50. (3 pkt) Wykaż, że kwadrat liczby niepodzielnej przez 3 daje resztę 1 przy dzieleniu przez 3.
51. (3 pkt) Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej k i każdej liczby całkowitej m liczba $k^3m - km^3$ jest podzielna przez 6.

08.11.2023r

52. (3 pkt) Ustal dla jakich wartości całkowitych liczby x, wyrażenie $\frac{x^3-2x+6}{x-2}$ osiąga wartość całkowitą.
53. (4 pkt) Dla jakich wartości parametru m liczba 1 zawiera się między różnymi pierwiastkami równania $(m-5)x^2-4mx+m-2=0$?
54. (5 pkt) Wyznacz wszystkie liczby $m \in \mathbb{R}$, dla których równanie $x^2+mx+(2m+1)=0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1 i x_2 takie, że $x_1^3+x_2^3=26$.
55. (4 pkt) Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie
$$x^3+(m-1)x-m=0$$
ma dokładnie dwa pierwiastki rzeczywiste. Dla otrzymanych wartości m wyznacz te pierwiastki.
56. (4p) Dla jakich wartości parametru m równanie $mx^2+2x+m-2=0$ ma dwa różne pierwiastki mniejsze od 1?
57. (3 pkt) Wykaż, że jeśli $x, y \in \mathbb{R}$ to $x^4+y^4+x^2+y^2 \geq 2\left(x^3+y^3\right)$
58. (4 pkt) Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej k i każdej liczby całkowitej m liczba k^5m-km^5 jest podzielna przez 5.
59. (5 pkt) Sporządź wykres funkcji $f(x)=\left|\frac{x-4}{x-2}\right|$, a następnie korzystając z tego wykresu, wyznacz wszystkie wartości parametru k, dla których równanie $\left|\frac{x-4}{x-2}\right|=k$, ma dwa rozwiązania, których iloczyn jest liczbą ujemną.
60. (4 pkt) Rozwiąż nierówność
$$\frac{2x-7}{5-2x} \leq -\frac{3-x}{2x+1}$$
61. (4p) Wykaż, że równanie $2x^3-3x^2-5=0$ ma w przedziale $(2;3)$ dokładnie jedno rozwiązanie.
62. (4p) Rozwiąż nierówność $|x-|4-x|| \leq 5$.
63. (5p) Wyznacz wszystkie wartości parametru k, dla których dwa różne rozwiązania równania $x^2-2(k-3)x+3-k=0$ należą do przedziału $(-2;0)$.
64. (5 pkt) Wykaż, bez użycia kalkulatora i tablic, że $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ jest liczbą całkowitą.
65. (3 pkt) Udowodnij, że dla każdej liczby nieparzystej n wyrażenie n^5-3n^4-n+19 jest podzielne przez 16.
66. (3 pkt) Udowodnij, że suma sześcianów trzech kolejnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 4 jest liczbą podzielną przez 36.
67. (3p) Przy dzieleniu wielomianu $W(x)$ przez dwumian $(x-1)$ otrzymano resztę -3, przy dzieleniu przez dwumian $(x-2)$ resztę 6, zaś przy dzieleniu przez dwumian $(x+3)$ resztę 1. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x)=x^3-7x+6$.

15.11.2023r

68. (3 pkt) Udowodnij, że dla każdej liczby nieparzystej n wyrażenie $n^5{-}3n^4{-}n{+}19$ jest podzielne przez 16.
69. (3 pkt) Udowodnij, że suma sześcianów trzech kolejnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 4 jest liczbą podzielną przez 36.
70. (4p) Wielomian $W(x)$ przy dzieleniu przez dwumian $(x-1)$ daje resztę równą 7. Liczba -1 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x) = x^2 - 1$.
71. (4p) Wielomian $W(x)$ przy dzieleniu przez dwumiany $(x-2)$, $(x-1)$, $(x+1)$ daje reszty odpowiednio równe 2, 4, -6. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $P(x) = (x{-}2)(x{-}1)(x+1)$.
72. (4p) Dla jakich wartości parametru m równanie $2x^2 - (m-1)x + m + 1 = 0$ ma różne pierwiastki rzeczywiste spełniające warunek $|x_2 - x_1| = 1$?
73. (3p) W trójkąt równoboczny o boku 1 wpisano trójkąt równoboczny, tak że jego wierzchołki pokryły się ze środkami boków pierwotnego trójkąta. W ten zaś wpisano następny trójkąt równoboczny w ten sam sposób i tak w nieskończoność. Oblicz sumę pól wszystkich otrzymanych w ten sposób trójkątów.
74. (4p) Wyznacz iloraz nieskończonego, zbieżnego ciągu geometrycznego, w którym pierwszy wyraz jest równy 6, zaś suma wszystkich wyrazów ciągu jest równa $\frac{1}{8}$ sumy ich kwadratów.
75. (4p) Cztery liczby tworzą ciąg geometryczny. Suma wyrazów skrajnych wynosi 36, zaś środkowych 24. Wyznacz ten ciąg.
76. (3p) Iloraz ciągu geometrycznego wynosi $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Wykaż, że każdy wyraz tego ciągu (z wyjątkiem wyrazu pierwszego) jest różnicą wyrazów: następnego i poprzedniego.
77. (3p) Wykaż, że liczby $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ nie mogą być wyrazami jednego ciągu arytmetycznego (niekoniecznie kolejnymi).
78. (4p) Suma S_n, n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego jest równa sumie S_m, m początkowych wyrazów tego ciągu. Wykaż, że $S_{m+n} = 0$.
79. (5p) ★ Wykaż, że nie istnieje liczba a, dla której wielomian $1{+}x{+}\frac{1}{2}x^2{+}\frac{1}{6}x^3$ jest podzielny przez $(x-a)^2$.

22.11.2023r

80. (4p) Rozwiąż nierówność $|x-3|-|1-x|>2-x$

81. (4p) Dla jakich wartości parametru r, rozwiązanie układu równań $\begin{cases} 2x-y=-3-r \\ x-y=-1+r \end{cases}$ spełnia warunek $|x|+|y|>2-r$?

82. (5p) Dla jakich wartości parametru k oba pierwiastki równania

$$x^2+(2k+6)x+4k+12=0$$

są większe od -1?

83. (5p) Dla jakich wartości parametru m równanie

$$x^2-(2m-1)x+m^2-4=0$$

ma dwa różne pierwiastki mniejsze od 4?

84. (3p) Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x)=x^2-4$ jest równa $R(x)=7x-2$. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $(x+2)$.

85. (4p) Wykaż, że równanie $x^3+(1+4m)x^2+(m^2+4m-1)x+m^2-1=0$ ma co najmniej jeden pierwiastek całkowity dla każdej wartości rzeczywistego parametru m.

86. (4p) Liczba 3 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu W określonego wzorem

$$W(x)=x^4-3x^3+ax^2+bx-18.$$

Znajdź pozostałe pierwiastki wielomianu. Rozwiąż nierówność $W(x)\geq 0$.

87. (3p) Wykaż, że wielomian $W(x)=x^4-2x^3+2x^2-8x+17$ nie ma pierwiastków rzeczywistych.

88. (3p) Funkcja $f(x)=\frac{ax+b}{x+d}$ rośnie w każdym z przedziałów: $(-\infty,-2)$, oraz $(-2,+\infty)$, zaś jej zbiorem wartości jest $\mathbb{R}\backslash\{4\}$. Wyznacz współczynniki a, b, d, wiedząc, że wykres funkcji f przechodzi przez punkty $P(6,3)$.

89. (4p) Rozwiąż nierówność $\frac{x^2+4x-1}{x+2}<x+3$.

90. (4p) Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym takim, że dla każdego $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ i każdego $m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ prawdziwa jest proporcja:

$$\frac{S_m}{S_k}=\frac{m^2}{k^2}.$$

Udowodnij, że $\frac{a_m}{a_k}=\frac{2m-1}{2k-1}$.

91. (4p) Liczby a,b,c,d są kolejnymi wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego, zaś liczby $a+5$, $b+6$, $c+9$, $d+16$ są kolejnymi wyrazami pewnego ciągu geometrycznego. Znajdź te liczby.

06.12.2023r

92. (4p) W skarbcu królewskim było k monet. Pierwszego dnia rano skarbnik dorzucił 25 monet, a każdego następnego ranka dorzucał o 2 monety więcej niż dnia poprzedniego. Jednocześnie ze skarbca król zabierał w południe każdego dnia 50 monet. Oblicz najmniejszą liczbę k, dla której w każdym dniu w skarbcu była co najmniej jedna moneta, a następnie dla tej wartości k oblicz, w którym dniu w skarbcu była najmniejsza liczba monet.
93. (4p) Ciąg (a, b, c) jest geometryczny, a ciągi $(4a-4, 2b-2, c-1)$ i $(a+5, b+3, c-15)$ są arytmetyczne. Oblicz a, b, c.
94. (5p) Dla jakich wartości parametru m rozwiązania równania $x^2+\frac{1}{m}x+m^2=0$ można przedstawić w postaci $x_1 = \sin\alpha, x_2 = \cos\alpha$ dla pewnego kąta $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$?
95. (5 pkt) Ciąg (a, b, c) jest geometryczny i $a+b+c=26$, zaś ciąg $(a-5, b-4, c-11)$ jest arytmetyczny. Oblicz a, b, c.
96. (4p) Rozwiąż równanie $2sin^2 3x + sin^2 6x = 2$ na przedziale $< 0; 2\pi >$.
97. (3p) Wykaż tożsamość $sin^6\alpha + cos^6\alpha = 1 - \frac{3}{4}sin^2 2\alpha$.
98. (5p) Rozwiąż równanie $sin^3 x + cos^3 x = 1$.
99. (5p) Wyznaczyć wzór na sumę $S_n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1}$.
100. (4p) Udowodnić równość $\cos 20^o \cos 40^o \cos 80^o = \frac{1}{8}$.
101. (5p) ★ Wykaż, że nie istnieje liczba a, dla której wielomian $1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3$ jest podzielny przez $(x-a)^2$.
102. (4p) Rozwiąż równanie $sin5x + sinx + 2sin^2 x = 1$, dla $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$.

13.12.2023r

103. [4 pkt] Wykaż, że ciąg (a_n), którego suma n początkowych wyrazów wyraża się wzorem

$$S_n = 3n^2 + 2n + 1,$$

nie jest ciągiem arytmetycznym.

104. [3 pkt] Wykaż, że jeśli $\cos(\alpha+\beta) = 0$ to $\sin(\alpha+2\beta) = \sin\alpha$.

105. [6 pkt] Ciąg $(x-3, x+3, 6x+2, \ldots)$ jest nieskończonym ciągiem geometrycznym o wyrazach dodatnich. Oblicz iloraz tego ciągu i uzasadnij, że $\frac{S_{19}}{S_{20}} < \frac{1}{4}$, gdzie S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów tego ciągu.

106. [2 pkt] Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n+2} - \frac{(n+2)^2}{n+444}\right).$$

107. [4 pkt] Dla jakich wartości parametru $m \in \mathbb{R}$ suma kwadratów pierwiastków równania

$$x^2 + (m-3)x + m - 5 = 0$$

jest najmniejsza?

108. [4 pkt] Sporządź wykres funkcji

$$f(x) = \left|\frac{2x}{x-2}\right|.$$

Omów ilość rozwiązań równania

$$f(x) = m + 2$$

w zależności od wartości parametru m.

109. [4 pkt] Czterowyrazowy ciąg (a, b, c, d) jest rosnący i arytmetyczny. Suma kwadratów trzech najmniejszych wyrazów tego ciągu jest pięciokrotnie większa od kwadratu czwartego wyrazu. Ponadto ciąg $(a-10, b, c)$ jest geometryczny. Oblicz wyrazy ciągu (a, b, c, d).

110. [4 pkt] Rozwiąż równanie $3\sin x \operatorname{tg} x = 2\sqrt{3}\sin x + 3\cos x$ w przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$.

111. [4 pkt] Oblicz ile jest liczb czterocyfrowych naturalnych parzystych, w których występuje dokładnie jedno zero.

112. [4 pkt] Dla pewnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi równość

$$\frac{1+x^4}{x^2} + \frac{1+16y^4}{4y^2} = 4.$$

Udowodnij, że $x^2 + y^2 = \frac{5}{4}$.

113. [4 pkt] 2011 CZERWIEC Spośród wszystkich liczb czterocyfrowych o cyfrach ze zbioru $\{1, 2, 3\}$ losujemy jedną. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma wszystkich cyfr wylosowanej liczby jest równa 7.

114. [4 pkt] 2012 MAJ Oblicz, ile jest liczb naturalnych ośmiocyfrowych takich, że iloczyn cyfr w ich zapisie dziesiętnym jest równy 12.

20.12.2023r

115. (5p) O funkcji g wiadomo, że $g(x)+g^2(x)+g^3(x)+\ldots=x$, gdzie lewa strona jest sumą szeregu geometrycznego zbieżnego. Dla jakich wartości parametru $m\in\mathbb{R}$ równanie $|g(x)|=m$ posiada dwa rozwiązania?
116. (4p) Rozwiąż nierówność $\sqrt{(x^2-|x|-2)^2}>2$.
117. (4p) Wyznacz ciąg geometryczny, w którym suma trzech pierwszych wyrazów wynosi $\frac{7}{2}$, zaś suma ich kwadratów wynosi $5,25$.
118. (4p) Wykaż, że jest dokładnie osiem liczb całkowitych k dla których wyrażenie $\frac{3k-1}{k+3}$ przyjmuje wartość całkowitą.
119. (3p) Wykaż, że jeśli liczby $x,y,z\neq 0$ spełniają równanie $x^3+y^3=2z^3$ to
$$\frac{1}{x^2+xz+z^2}+\frac{1}{z^2+zy+y^2}=\frac{2}{x^2+xy+y^2}$$
.
120. (3p) Wykaż, że jeśli $a+\frac{1}{a}$ jest liczbą całkowitą, to $a^4+\frac{1}{a^4}$ również jest liczbą całkowitą.
121. (4p) Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie
$$(x-3)\left(x^2+(m-1)x-6m^2+2m\right)=0$$
ma dokładnie dwa rozwiązania.
122. (4p) Rozwiąż równanie $sinx+sin2x=sin3x$ w przedziale $x\in<0;2\pi>$.
123. (4p) Rozwiąż równanie $\sin 5x+2\sin^2 x+\sin x=1$ w przedziale $\langle-\pi,\pi\rangle$.
124. (5p) Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n), określony dla każdej liczby naturalnej $n\geq 1$. Suma trzech początkowych wyrazów ciągu (a_n) jest równa 7, a suma S wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa 8. Wyznacz wszystkie wartości n, dla których spełniona jest nierówność
$$\left|\frac{S-S_n}{S_n}\right|<0,001$$
gdzie S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów ciągu (a_n).
125. (4p) Reszty z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $(x-1)$, $(x+1)$, $(x+2)$, są odpowiednio równe $1,-1,2$. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x)=(x-1)(x+1)(x+2)$.
126. (4p) Omów ilość rozwiązań równania $\frac{|x-1|}{x^2-1}=3m-1$ ze względu na wartość parametru m.

03.01.2024r

127. (4 pkt) Rzucamy pięć razy symetryczną kostką sześcienną. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, polegającego na tym, że „jedynka” wypadnie co najmniej cztery razy.
128. (4 pkt) Uczniowie dojeżdżający do szkoły zaobserwowali, że spóźnienie autobusu zależy od tego, który z trzech kierowców prowadzi autobus. Przeprowadzili badania statystyczne i obliczyli, że w przypadku, gdy autobus prowadzi kierowca A, spóźnienie zdarza się w 5% jego kursów, gdy prowadzi kierowca B w 20% jego kursów, a gdy prowadzi kierowca C w 50% jego kursów. W ciągu 5-dniowego tygodnia nauki dwa razy prowadzi autobus kierowca A, dwa razy kierowca B i jeden raz kierowca C. Oblicz prawdopodobieństwo spóźnienia się szkolnego autobusu w losowo wybrany dzień nauki.
129. (4 pkt) 2003 STYCZEŃ Rzucamy pięć razy symetryczną kostką sześcienną. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, polegającego na tym, że „jedynka” wypadnie co najmniej cztery razy.
130. (5 pkt) 2003 MAJ Zawierając w kolekturze Toto-Lotka jeden zakład w grze „Expres-Lotek” zakreślamy 5 spośród 42 liczb. Oblicz prawdopodobieństwo trafienia co najmniej 4 spośród 5 wylosowanych liczb. Wynik podaj w zaokrągleniu do $0,00001$.
131. (5 pkt) 2004 STYCZEŃ W pierwszej loterii jest n, $(n > 2)$ losów, w tym jeden los wygrywający. W drugiej loterii $2n$ losów, w tym dwa wygrywające. W której z loterii należy kupić dwa losy, aby mieć większą szansę wygranej? Odpowiedź uzasadnij.
132. (6 pkt) 2005 STYCZEŃ Krótki łańcuch choinkowy składa się z dwudziestu żarówek. Dla każdej z żarówek prawdopodobieństwo, że będzie działać przez co najmniej 300 godzin jest równe $0,9$.
     a) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w krótkim łańcuchu w ciągu 300 godzin przepali się co najwyżej jedna żarówka. W obliczeniach możesz przyjąć, że $(0,9)^{19} \approx 0,14$.
     b) W skrzyni jest 6 łańcuchów krótkich i 4 łańcuchy długie. Do dekoracji choinki użyto cztery losowo wybrane łańcuchy. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że do dekoracji użyto dwóch łańcuchów krótkich i dwóch łańcuchów długich.
133. (4 pkt) 2005 MAJ Rzucamy n razy dwiema symetrycznymi sześciennymi kostkami do gry. Oblicz, dla jakich n prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej raz tej samej liczby oczek na obu kostkach jest mniejsze od $\frac{671}{1296}$.
134. (5 pkt) 2008 MARZEC Rzucamy trzykrotnie symetryczną kostką sześcienną do gry. Oblicz prawdopodobieństwa następujących zdarzeń:
     A – na każdej kostce wypadnie nieparzysta liczba oczek,
     B – suma kwadratów liczb wyrzuconych oczek będzie podzielna przez 3.
135. (4 pkt) 2009 MAJ W urnie znajdują się jedynie kule białe i czarne. Kul białych jest trzy razy więcej niż czarnych. Oblicz, ile jest kul w urnie, jeśli przy jednoczesnym losowaniu dwóch kul prawdopodobieństwo otrzymania kul o różnych kolorach jest większe od $\frac{9}{22}$.
136. (4 pkt) 2010 SIERPIEŃ Liczby $1,2,3,4,5,6,7,8$ ustawiamy losowo w szeregu. Oblicz prawdopodobieństwo, że w tym ustawieniu suma każdych dwóch sąsiednich liczb będzie nieparzystą. Wynik podaj w postaci ułamka nieskracalnego.
137. (5p) Zbadaj dla jakich wartości parametru $m \in \mathbb{R}$ równanie $\frac{x^2+5x+1}{1+x^2} = m$ ma rozwiązania. Dla

jakich wartości ma dwa rozwiązania dodatnie? Dla jakich dwa rozwiązania ujemne?

138. (4pkt) Kolejne cyfry dodatniej liczby trzycyfrowej tworzą ciąg geometryczny. Suma cyfr jedności i dziesiątek jest o jeden większa od cyfry setek. Jeżeli od szukanej liczby odejmiemy liczbę złożoną z tych samych cyfr, lecz napisanych w odwrotnej kolejności to otrzymamy 495. Znajdź tę liczbę.

139. (3p) Udowodnić, że liczba $10^n - 4$ jest podzielna przez 6, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

140. (4pkt) Znaleźć parametr m dla którego równanie $x^2+2mx+2m-1=0$ ma dwa rozwiązania spełniające warunek:

$$m\left(x_1^2+x_2^2\right)=3mx_1x_2+2$$

141. (2pkt) W zawodach bierze udział 20 drużyn piłkarskich, każda z każdą gra dwa mecze. Ile meczy zostanie rozegranych?

142. (3pkt) Rzucamy 4 razy sześcienną kostką. Oblicz prawdopodobieństwo, że przynajmniej raz wypadnie 6 oczek pod warunkiem, że dwa razy wypadło 5 oczek.

143. (4pkt) Rozwiąż równanie $\sin^2 4x = 1 - \sin^2 2x$.

144. (4p) Rozwiąż nierówność $(x-1)\sqrt{x+4} < 2-4x$.

145. (3p) Wykaż, że jeśli $x+y+z=0$, oraz $x^2+y^2+z^2=a$, to $x^4+y^4+z^4=\frac{a^2}{2}$.

10.01.2024r

146. [3p] Wiedząc, że $P(A' \cup B') = \frac{4}{7}$, oraz $P(A \setminus B) = \frac{1}{3}$. Wykaż, że $P(B|A) < \frac{5}{8}$.
147. [4 pkt] 2002 MAJ A i B są zdarzeniami losowymi i $P(B) > 0$. Wykaż, że $P(A|B) \leq \frac{1-P(A')}{P(B)}$.
148. [3 pkt] 2003 MAJ Niech Ω będzie zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych i $A \subset \Omega, B \subset \Omega$. Oblicz $P(A \cap B)$ wiedząc, że $P(A \cup B) = \frac{5}{8}, P(A) = \frac{1}{2}, P(B') = \frac{3}{4}$. Sprawdź, czy zdarzenia A i B są zdarzeniami niezależnymi?
149. [4 pkt] 2005 GRUDZIEŃ Niech $A, B \subset \Omega$ będą zdarzeniami losowymi, takimi że $P(A) = \frac{5}{12}$ oraz $P(B) = \frac{7}{11}$. Zbadaj, czy zdarzenia A i B są rozłączne.
150. [4 pkt] 2006 STYCZEŃ Para (Ω, P) jest przestrzenią probabilistyczną, a $A \subset \Omega$ i $B \subset \Omega$ są zdarzeniami niezależnymi. Wykaż, że jeżeli $P(A \cup B) = 1$, to jedno z tych zdarzeń jest zdarzeniem pewnym tj. $P(A) = 1$ lub $P(B) = 1$.
151. [3 pkt] 2006 LISTOPAD Niech $A \subset \Omega$ i $B \subset \Omega$ będą zdarzeniami losowymi. Mając dane prawdopodobieństwa zdarzeń: $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,4$ i $P(A \setminus B) = 0,3$, zbadaj, czy A i B są zdarzeniami niezależnymi.
152. [4 pkt] 2007 MAJ Niech A, B będą zdarzeniami o prawdopodobieństwach $P(A)$ i $P(B)$. Wykaż, że jeżeli $P(A) = 0,85$ i $P(B) = 0,75$, to prawdopodobieństwo warunkowe spełnia nierówność $P(A|B) \geq 0,8$.
153. [4 pkt] 2008 MAJ Z pewnej grupy osób, w której jest dwa razy więcej mężczyzn niż kobiet, wybrano losowo dwuosobową delegację. Prawdopodobieństwo tego, że w delegacji znajdą się tylko kobiety jest równe $0,1$. Oblicz, ile kobiet i ilu mężczyzn jest w tej grupie.
154. [4 pkt] 2009 STYCZEŃ Oblicz prawdopodobieństwo $P(A' \cap B')$, jeśli $P(A') = \frac{1}{3}$, $P(B') = \frac{1}{4}$ i $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$.
155. [4 pkt] 2011 MAJ Oblicz, ile jest liczb ośmiocyfrowych, w zapisie których nie występuje zero, natomiast występują dwie dwójki i występują trzy trójki.
156. [3 pkt] 2011 MAJ A, B są zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω. Wykaż, że jeżeli $P(A) = 0,9$ i $P(B) = 0,7$, to $P(A \cap B') \leq 0,3$ [B' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia B].
157. [4p] Rzucamy cztery razy dwiema kostkami. Jakie jest prawdopodobieństwo, że co najwyżej trzy razy otrzymamy sumę oczek nie większą od trzech? Wynik podaj z dokładnością do trzeciego miejsca po przecinku.
158. [4p] Liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego o różnicy równej 5. Jedna z tych liczb jest podzielna przez 5. Wykaż, że iloczyn $a \cdot b \cdot c$ dzieli się przez 750.
159. [5p] Wyznacz wartość rzeczywistego parametru m dla którego równanie

$$x^3 + (24m^3 + 14m^2 - 7m - 3)x^2 - 6x = 0$$

ma trzy, parami różne, pierwiastki. Takie, że jeden z nich jest średnią arytmetyczną dwóch pozostałych.
160. [4p] Rozwiąż nierówność

$$\frac{3}{x-1} - \frac{4x-1}{x+1} \leq \frac{x^2+5}{x^2-1} - 5$$

161. [3p] Rozwiąż nierówność $2x^2 + (x+1)|2x+1| \geq 1 - 4x$.

162. (5p) Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{|x^2-4|}$. Korzystając z wykresu, omów ilość rozwiązań równania $f(x) = m$ ze względu na wartość parametru $m \in \mathbb{R}$.

163. (5p) Rozwiąż równanie

$$1 + \sqrt{3}\sin 4x = \sin^2 2x - \cos^2 2x$$

na przedziale $x \in [-\pi, \frac{\pi}{2}]$.

31.01.2024r

164. (4 pkt) Rozwiąż równanie $\operatorname{ctg} x - \cos x = \frac{1-\sin x}{2\sin x}$ na przedziale $(0;2\pi)$.

165. (4 pkt) W pudełku znajduje się 8 karteczek z zapisanymi kolejnymi liczbami naturalnymi od 2 do 9. Losujemy jedną karteczkę, zapisujemy liczbę na niej występującą, a następnie zwracamy karteczkę do pudełka. Tę procedurę wykonujemy jeszcze dwa razy, tym samym otrzymując zapisane trzy liczby. Oblicz prawdopodobieństwo, że iloczyn trzech zapisanych liczb jest podzielny przez 4. Wynik zapisz w postaci ułamka nieskracalnego.

166. (3 pkt) Do wykresu funkcji $f(x) = x^3 - 3x - 2$ poprowadzono styczną l w punkcie A o odciętej $x = -2$. Prosta l przecina wykres funkcji f w punkcie $B \neq A$. Wyznacz współrzędne punktu B.

167. (3 pkt) Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 1$. Wyznacz równanie stycznej do wykresu tej funkcji w punkcie $P = (-3,-3)$.

168. (3 pkt) Styczna do paraboli o równaniu $y = \sqrt{3}x^2 - 1$ w punkcie $P = (x_0, y_0)$ jest nachylona do osi Ox pod kątem $30°$. Oblicz współrzędne punktu P.

169. (5 pkt) Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \frac{x^3+k}{x}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 0$. Oblicz wartość k, dla której prosta o równaniu $y = -x$ jest styczna do wykresu funkcji f.

170. (3 pkt) Niech $a = \log_{12} 2$. Wykaż, że $\log_6 64 = \frac{6a}{1-a}$.

171. (3p) Dwóch egzaminatorów, pracując razem, jest w stanie sprawdzić arkusze w czasie 8 godzin. Jeżeli każdy z nich wykonywałby tę pracę sam, to pierwszy, bardziej doświadczony zakończyłby ją o 12 godzin wcześniej niż drugi. W ciągu ilu godzin każdy z egzaminatorów wykonałby tę pracę samodzielnie?

172. (3p) Rozwiąż równanie $\sin 3x + \sin 9x = 0$ na przedziale $x \in [0, \pi]$.

173. (3pkt) Wykaż że funkcja:

$$f(x) = \log_{\frac{1}{3}}\left(x^2+1\right) + \log_{\frac{1}{5}}\left(x^2+2\right) + 2 \quad (x \in \mathbb{R})$$

ma miejsce zerowe.

174. (3 pkt) Wykaż, że jeżeli $A = 3^{4\sqrt{2}+2}$ i $B = 3^{2\sqrt{2}+3}$, to $B = 9\sqrt{A}$.

07.02.2024r

175. Wykaż, że jeśli liczba $a \in \mathbb{Z}$ daje resztę 4 przy dzieleniu przez 5 to liczba a^3+1 dzieli się przez 5.
176. Wykaż, że dowolna liczba całkowita niepodzielna przez 3 po podniesieniu do kwadratu daje resztę 1 przy dzieleniu przez 3.
177. Wykaż, że jeśli dla $x, y, z \in \mathbb{Z}$ zachodzi $3 \mid x+y+z$ to również $3 \mid x^3+y^3+z^3$.
178. Wykaż, że dla dowolnej liczby $m \in \mathbb{Z}$ wyrażenie $(m+2)^4 - m^4$ dzieli się przez 8.
179. Wykaż, że dla każdej liczby $m \in \mathbb{Z}$ wyrażenie $m^6 - 2m^4 + m^2$ dzieli się przez 36.
180. Wykaż, że dla każdej liczby nieparzystej n wyrażenie

$$n^5 - 3n^4 - n + 3$$

jest podzielne przez 16.
181. Udowodnij, że jeżeli liczba całkowita n nie jest podzielna przez 3, to wyrażenie $n^4 - 17n^2 + 7$ jest podzielne przez 9.
182. Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $n^3 + 5n$ jest podzielna przez 6.
183. Wykaż, że jeśli $x, y \in \mathbb{R}_+$ to $\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$
184. $x, y \in \mathbb{R}_+$ to $\sqrt{xy} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$.
185. $x, y \in \mathbb{R}$ to $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geqslant \frac{x+y}{2}$.
186. $x \in \mathbb{R}_+$ to $x + \frac{1}{x} \geq 2$.
187. $x, y \in \mathbb{R}_+$ to $(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \geqslant 4$.
188. $x, y, z \in \mathbb{R}_+$ to $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) > 8$.
189. $x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ to $\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2} \geqslant \frac{1}{3}$.
190. $x, y, z, w \in \mathbb{R}_+$ to $\sqrt{(x+z)(y+w)} \geqslant \sqrt{xy} + \sqrt{zw}$.

14.02.2024r

191. Wykaż, że jeśli $x, y, z \in \mathbb{R}_+ \wedge x+y+z=48$ to $\sqrt[3]{xyz} \leqslant 17$.
192. Wykaż, że jeśli $x, y, z \in \mathbb{R}_+$ to $(x+y)(y+z)(z+x) \geqslant 8xyz$.
193. Wykaż, że jeśli $x, y, z \in \mathbb{R}_+ \wedge xyz=1$ to $xy+xz+yz+x+y+z \geqslant 6$.
194. Wykaż, że jeśli $x, y \in \mathbb{R} \wedge x+y>0$ to $x^3+y^3 \geqslant xy^2+yx^2$.
195. Wykaż, że jeśli $x, y, z \in \mathbb{R}_+$ to $x^3+y^3+z^3+(x+y+z)^3 \geqslant (x+y)^3+(y+z)^3+(x+z)^3$.
196. Wykaż, że dla dowolnej liczby $x \in \mathbb{Z}$ wyrażenie $x^5-5x^3+4x-30$ dzieli się przez 30.
197. Wykaż, że jeśli n jest liczbą naturalną nieparzystą, to wyrażenie $\frac{n^6-n^4+n^3-n}{n^2-n+1}$ jest liczbą podzielną przez 48.
198. Wykaż, że suma sześcianów trzech kolejnych liczb naturalnych jest liczbą podzielną przez 9.
199. Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej k i każdej liczby całkowitej m liczba k^3m-km^3 jest podzielna przez 6.
200. Wykaż, że jeśli dla liczba naturalnych x, y, z zachodzi $x^2+y^2=z^2$ to co najmniej jedna z liczb x, y, z dzieli się przez 3.

21.02.2024r

201. Wykaż, że jeśli $x, y \in \mathbb{R}$ to $x^2 + y^2 + 1 \geqslant xy + x + y$
202. Wykaż, że jeśli $x, y, z \in \mathbb{R}$ to $x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 13 \geqslant 2x + 12y + 6z$
203. Wykaż, że jeśli $x, y \in \mathbb{R}$ to $4x^2 + y^2 + 20x - 2y + 26 \geq 0$
204. Wykaż, że jeśli $x \in \mathbb{R}$ to $x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1 > 0$
205. Wykaż, że jeśli $x \in \mathbb{R}_+$ to $x^3 + \frac{3}{x} \geq 4$.
206. Wykaż, że nierówność $\sqrt[4]{\frac{a^4+b^4}{2}} \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ jest spełniona przez wszystkie liczby rzeczywiste a i b.
207. Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x i y takich, że $x^2+y^2 = 2$, prawdziwa jest nierówność $x + y \leq 2$.
208. Uzasadnij, że jeżeli $a \neq b, a \neq c, b \neq c$ i $a + b = 2c$, to $\frac{a}{a-c} + \frac{b}{b-c} = 2$.
209. Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x oraz dla każdej liczby rzeczywistej y, spełniających warunek $x + y \geq 1$, prawdziwa jest nierówność

$$x^3 + 2xy + y^3 \geq x^2 + xy(x + y) + y^2$$

210. Wykaż, że jeśli $x \in \mathbb{R}$ to $3x^4 + 4x^3 > 36x^2 - 192$
211. Wykaż, że jeśli $x, y \in \mathbb{R}$ to $5x^2 + 5y^2 - 8xy \geq 0$
212. Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej k i każdej liczby całkowitej m liczba $k^5m - km^5$ jest podzielna przez 10.
213. Wykaż, że jeśli $n \in \mathbb{N}$ to wyrażenie $4^{n+2} - 4^n$ dzieli się przez 60.
214. Wykaż, że jeśli $n \in \mathbb{N}$ to $10 \mid 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$.
215. Reszta z dzielenia liczby naturalnej a przez 6 jest równa 1. Reszta z dzielenia liczby naturalnej b przez 6 jest równa 5. Uzasadnij, że liczba $a^2 - b^2$ jest podzielna przez 24.

28.02.2024r

216. (4p) Pierwiastkami wielomianu stopnia trzeciego są liczby $1, 3, 5$. Współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej tego wielomianu jest równy $\frac{1}{2}$. Uzasadnij, że dla każdej liczby całkowitej nieparzystej wartość tego wielomianu jest liczbą podzielną przez 24

217. (5p) Dany jest okrąg o środku w punkcie $S(2,1)$ i promieniu $\sqrt{17}$. Punkty A, B są punktami przecięcia tego okręgu z osią OX. Punkt C leży na prostej $l : 3x - y + 3 = 0$, a pole trójkąta ABC równa się 24. Oblicz współrzędne wierzchołka C.

218. (4 pkt) 2020 LIPIEC Dla pewnych liczb rzeczywistych $a > 1, b > 1$ i $N > 1$ jest spełniona równość

$$\log_{a^2 b} N = \frac{3}{20} \cdot \left(\log_a N + \log_b N\right).$$

Wyznacz wszystkie wartości wyrażenia $\log_a b$.

219. (6p) Rozważamy zbiór wszystkich trapezów równoramiennych o przekątnej długości $10\sqrt{6}$. Wyznacz sumę długości podstaw tego trapezu, którego pole jest największe. Wyznacz to największe pole.

220. (3p) Wielomian f jest dany wzorem

$$f(x) = 3x^4 - 4kx^3 + 6x^2 - 12kx$$

z parametrem rzeczywistym k. Wyznacz wszystkie wartości k, dla których funkcja f jest rosnąca w przedziale

$[2;\infty)$ i nie jest rosnąca w żadnym przedziale postaci $[a;\infty)$ dla $a < 2$.

221. (3p) Ustal dla jakich wartości parametru rzeczywistego a wykresy funkcji

$$f(x) = -x^2, \text{ oraz } g(x) = \frac{1}{ax}$$

przecinają się pod kątem prostym.

222. (6p) Dana jest rodzina trójkątów ABC spełniających warunki $A = (-\frac{7}{2}, 0)$, $B = (a; 0)$, C należy do paraboli o równaniu $y = 4x - x^2$, oraz $|\angle ABC| = 90^o$. Druga współrzędna punktu C jest liczbą dodatnią. Oblicz pierwszą współrzędną wierzchołka C tego z rozpatrywanych trójkątów, którego pole jest największe.

223. (4p) Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Wyznacz równania tych stycznych do wykresu funkcji f, które są równoległe do prostej o równaniu $y = 4x$.

224. (4p) Funkcja kwadratowa f jest określona wzorem

$$f(x) = px^2 + (p-1)x + 1 - 2p \text{ dla każdego } x \in \mathbb{R}.$$

Wyznacz wszystkie wartości parametru p, dla których funkcja f ma dokładnie dwa miejsca zerowe x_1 i x_2, których różnica równa się 1.

06.03.2024r

225. (4p) Ciężarówka ma do pokonania trasę długości $S\ km$, poruszając się po autostradzie ze stałą prędkością $v\ km/h$. Minimalna prędkość dla ciężarówek na autostradzie wynosi $40 km/h$, maksymalna - $80 km/h$. Wiemy, że litr paliwa kosztuje 8 złotych, a kierowca otrzymuje 42 złote za godzinę swej pracy. Zużycie paliwa w ciągu jednej godziny jazdy autostradą w zależności od prędkości v wyrażone w litrach można opisać funkcją $f(v) = 7 + \frac{v^2}{400}$. Oblicz, przy jakiej prędkości koszt przejazdu będzie najmniejszy.
Wskazówka: przyjmij, że koszt przejazdu jest sumą kosztu paliwa oraz wynagrodzenia kierowcy.
226. (6 pkt) Punkt $A = (-2, 6)$ jest wierzchołkiem rombu $ABCD$ o polu 90. Przekątna BD zawiera się w prostej l o równaniu $2x - y - 5 = 0$. Wyznacz długość boku tego rombu.
227. (4pkt) Pole trójkąta ABC wynosi 24, gdzie $A(4, -2), B(2, 1), C(11, m)$. Wyznacz współrzędne punktu $P \in AC$ tak aby $|AP| = |AB|$.
228. (4pkt) Dana jest funkcja $f(n) = 2^{-n}$, gdzie $n \geqslant 1, n \in \mathbb{N}$ punkt (x, y) należący do wykresu $f(n)$ jest środkiem koła, które jest styczne do Ox. Oblicz sumę pól wszystkich takich kół.
229. (6pkt) W kulę o promieniu 5 wpisano walec. Oblicz wysokość i promień podstawy walca o największej objętości.
230. (4 pkt) Uczeń analizował własności funkcji f, której dziedziną jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych i która ma pochodną $f'(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Wyniki tej analizy zapisał w tabeli. Niestety, wpisując znaki pochodnej, popełnił jeden błąd.

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 2)$	2	$(2, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	$(+)$	0	$(-)$	0	$(-)$	0	$(-)$
$f(x)$		2		-1		1	

a) Przekreśl błędnie wpisany znak pochodnej i wstaw obok prawidłowy.
b) Napisz, czy po poprawieniu błędu w tabeli, zawarte w niej dane pozwolą określić dokładną liczbę miejsc zerowych funkcji f. Uzasadniając swoją odpowiedź możesz naszkicować przykładowe wykresy funkcji.
231. (6p) Producent zamierza rozlewać sok do pudełek, w kształcie prostopadłościanu, o pojemności 1,8 litra. Dobierz wymiary pudełka, tak aby na jego wyprodukowanie zużyć jak najmniej materiału przyjmując, że stosunek długości sąsiednich krawędzi podstawy pudełka jest równy 2 : 3 (wykonując obliczenia zaniedbaj ilość materiału potrzebnego na sklejenia, złożenia itp.).
232. (6p) W jakim punkcie paraboli o równaniu $y = x^2 - 1$ należy poprowadzić styczną, aby trójkąt ograniczony tą styczną i osiami układu współrzędnych miał najmniejsze pole?
233. (6p) Punkty A, B i C o odciętych (tzn. pierwszych współrzędnych) odpowiednio równych $-2, -1, x_0$, gdzie $x_0 > 0$ leżą na wykresie funkcji $f(x) = \frac{4}{x}$ Jakie może być najmniejsze pole trójkąta ABC?
234. (4p) Ze zbioru liczb $\{1, 2, \ldots, 27\}$ wyciągnięto siedem liczb i ustawiono w kolejności rosnącej $x_1 < x_2 < \ldots < x_7$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że $x_5 \geq 24$.

13.03.2024r

235. Rzucamy cztery razy sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo, że przynajmniej raz wypadnie sześć oczek pod warunkiem, że dwa razy wypadło pięć oczek.

236. Punkty $A = (-3, -4), B = (7, -4), C = (7, 4)$ są wierzchołkami trójkąta.
a) Napisz równanie okręgu opisanego na tym trójkącie.
b) Określ wzajemne położenie znalezionego okręgu z okręgiem o równaniu $x^2+y^2-12x+6y+42 = 0$.

237. Dany jest okrąg $(x-3)^2 + (y-6)^2 = 16$ i punkt $A = (0, 2)$.
a) Wyznacz zbiór wszystkich współczynników kierunkowych prostych, które przechodzą przez punkt A i są rozłączne z danym okręgiem.
b) Napisz równania stycznych do okręgu przechodzących przez punkt A.

238. Dany jest równoległobok, którego boki zawierają się w prostych o równaniach: $y = x + b$, $y = x + 2b, y = b, y = 2$, gdzie liczba rzeczywista b spełnia warunki: $b \neq 2$ i $b \neq 0$. Wyznacz wszystkie wartości parametru b, dla których pole tego równoległoboku jest równe 1.

239. Dane są prosta k o równaniu $x - 2y = 0$ i prosta l o równaniu $2x + y - 1 = 0$. Punkt P leży na prostej o równaniu $y = x+4$. Odległość punktu P od prostej k jest dwa razy większa niż odległość punktu P od prostej l. Oblicz współrzędne punktu P.

240. Na stronie książki tekst powinien zajmować $S\ cm^2$. Prawy i lewy margines mają po a cm, a górny i dolny po b cm. Jakie powinny być wymiary strony, aby zużycie papieru było najmniejsze?

241. Rzucamy jednocześnie dwunastoma kośćmi do gry. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że każda liczba oczek wypadła dokładnie dwa razy.

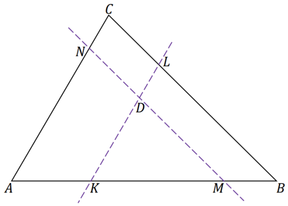
242. Rzucamy pięciokrotnie kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania dokładnie dwóch „2” lub trzech „3”.

243. Oblicz, ile jest różnych liczb czterocyfrowych, w których dwójki i czwórki nie stoją obok siebie.

244. Wykaż, że jeśli dla zdarzeń losowych $A, B \subset \Omega$ zachodzi $P(A') = \frac{1}{3}$, oraz $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$, to $P(B) \geq \frac{1}{12}$.

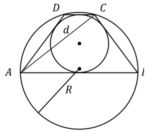
20.03.2024r

245. Liczby x_1 oraz x_2 są różnymi pierwiastkami równania kwadratowego $(m-2)x^2-2x+1=0$. Narysuj wykres funkcji $f(m)=|x_1+x_2+x_1\cdot x_2|$.
246. Wykaż, że dla dowolnych liczb $x,y,z,w\in\mathbb{R}_+$ zachodzi $\frac{x^2}{y}+\frac{z^2}{w}\geqslant\frac{(x+z)^2}{y+w}$
247. (6p) Punkt D leży wewnątrz trójkąta ABC. Prosta przechodząca przez punkt D i równoległa do boku AC przecina bok AB w punkcie K, a bok BC w punkcie L. Prosta przechodząca przez punkt D i równoległa do boku BC przecina bok AB w punkcie M, a bok AC w punkcie N (zobacz rysunek). Stosunek obwodu trójkąta KMD do obwodu trójkąta KBL jest równy 5 : 7, a stosunek obwodu trójkąta KMD do obwodu trójkąta AMN jest równy 5 : 8. Pole czworokąta $DLCN$ jest równe 15.



Oblicz pole trójkąta ABC.

248. (3pkt) Dany jest trapez równoramienny $ABCD, AB\|CD$ oraz $|AB|=2|DC|$. Przekątna zawiera się w dwusiecznej kąta przy podstawie. Udowodnij że $|\sphericalangle DAB|=60°$.
249. (5 pkt) 2002 MAJ W trójkącie jeden z kątów ma miarę $120°$. Długości boków tego trójkąta są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, którego suma wynosi 30. Wyznacz stosunek długości promienia okręgu opisanego na tym trójkącie do długości promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.
250. Dany jest trapez równoramienny $ABCD$ o obwodzie l i podstawach AB oraz CD takich, że $|AB|>|CD|$. Trapez jest opisany na okręgu i wpisany w okrąg, a przekątna AC trapezu ma długość d (zobacz rysunek).



Wykaż, że promień R okręgu opisanego na trapezie $ABCD$ jest równy $\frac{d\cdot l}{2\sqrt{16d^2-l^2}}$.

251. (5 pkt) 2003 STYCZEŃ Trapez równoramienny, o obwodzie równym $20cm$, jest opisany na okręgu. Wiedząc, że przekątna trapezu ma długość $\sqrt{41}cm$, oblicz pole tego trapezu.
252. (5 pkt) 2004 STYCZEŃ Odcinki o długościach: $2\sqrt{3}, 3-\sqrt{3}, 3\sqrt{2}$ są bokami trójkąta.
a) Wyznacz miarę największego kąta tego trójkąta i oblicz długość wysokości poprowadzonej z wierzchołka tego kąta.

b) Oblicz długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.

253. (4 pkt) 2005 STYCZEŃ W trójkącie ABC, o kącie rozwartym przy wierzchołku C dane są długości boków $|AC| = 5cm$ i $|BC| = 12cm$. Oblicz długość boku AB wiedząc, że pole trójkąta jest równe $24cm^2$.

254. W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczne AD i CE, gdzie punkty D i E leżą odpowiednio na bokach BC, AB. Dwusieczne te przecięły się w punkcie P. Wykaż, że jeśli na czworokącie $PEBD$ można opisać okrąg, to $|\sphericalangle PAC| + |\sphericalangle ACP| = 60^o$.

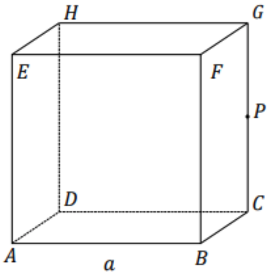
27.03.2024r

255. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$2x^2-(2m+7)x+m^2-3m+21=0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 oraz x_2, spełniające warunek $x_1=2x_2$.

256. Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi długości a. Punkt P jest środkiem krawędzi CG tego sześcianu.



$|PG|=|PC|$

Oblicz odległość wierzchołka C od płaszczyzny zawierającej punkty B, D oraz P.

257. Narysuj wykres funkcji $f(x)=\frac{|x^2-9|}{3-x}$. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $f(x)=m$ nie ma rozwiązania. Zapisz obliczenia.

258. Dany jest rosnący ciąg arytmetyczny (a_n) określony dla każdej liczby naturalnej $n\geq 1$. Ciąg $(a_1\cdot a_2, a_2\cdot a_3, a_3\cdot a_1)$ jest geometryczny i ma wyrazy różne od zera. Oblicz iloraz tego ciągu geometrycznego. Zapisz obliczenia.

259. W trapezie $ABCD$ przekątna BD jest dwusieczną kąta CBA i przecina przekątną AC w punkcie K, takim, że $|CK|:|KA|=1:3$. Pole tego trapezu jest równe $100(\sqrt{6}-\sqrt{2})$, $\sin\sphericalangle BAD=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $|AD|=10$ oraz kąt BAD jest ostry. Oblicz długości pozostałych boków trapezu $ABCD$. Zapisz obliczenia.

260. Funkcja kwadratowa f jest określona wzorem $f(x)=px^2+(p-1)x+1-2p$ dla każdego $x\in R$. Wyznacz wszystkie wartości parametru p, dla których funkcja f ma dokładnie dwa miejsca zerowe różniące się o 1.

261. Oblicz granicę $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{6^n+7^n}$.

262. Firma X wytwarza pewien produkt D. Badania rynku pokazały, że związek między ilością Q produktu D, jaką firma jest w stanie zbyć na rynku, a ceną P produktu jest następujący:

$$P(Q)=90-0,1Q \text{ dla } Q\in[0,900]$$

gdzie P jest ceną za jednostkę produktu w złotych, a Q-ilością produktu w tys. sztuk. Koszty K wytworzenia produktu D zależą od ilości Q wytwarzanego produktu następująco:

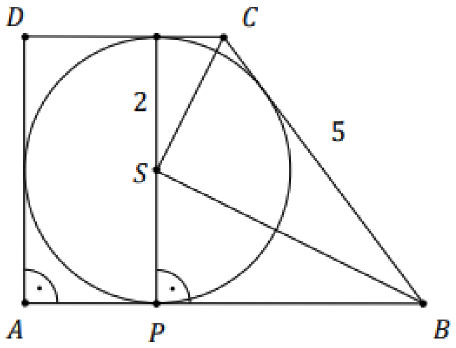
$$K(Q)=0,002Q^3+Q^2+29,9985Q+50$$

gdzie K jest kosztem produkcji w tys. zł. Oblicz, przy jakiej wielkości produkcji firma X osiąga największy dochód. Wynik podaj zaokrąglony z dokładnością do 100 sztuk.

263. Proste o równaniach $2x + y - 4m - 4 = 0$ i $x - 3y + 5m + 5 = 0$ przecinają się w punkcie P o współrzędnych (x_P, y_P).
Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których współrzędne punktu P spełniają warunki:

$$x_P > 0, \quad y_P > 0, \quad y_P \geq x_P^2 \text{ oraz } y_P < -\frac{2}{x_P} + 8$$

264. Dany jest trapez prostokątny $ABCD$ o kątach prostych przy wierzchołkach A i D. Ramię BC trapezu ma długość 5 . W ten trapez wpisano okrąg o środku w punkcie S i promieniu 2 . Punkt P jest punktem styczności okręgu i dłuższej podstawy AB tego trapezu (zobacz rysunek).



Wykaż, że trójkąty BPS i BSC są trójkątami podobnymi, oraz oblicz skalę tego podobieństwa.

03.04.2024r

265. Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{3x}{x+1}$ dla każdego $x \in (-1;+\infty)$. Wykaż, że f jest funkcją rosnąca.
266. Syzyf codziennie stoi przed zadaniem wtoczenia ciężkiej kamiennej kuli na szczyt pewnej góry. W chwili $t=0$ znajduje się on w punkcie O oddalonym od szczytu o $4km$, a położenie x Syzyfa wtaczającego kulę jest opisane równaniem $x(t) = -t^3 + 16,5t^2 + 180t$ dla $t \in [0,24]$ gdzie x jest wyrażone w metrach, a t w godzinach.
Oś Ox jest skierowana do wierzchołka góry i jest styczna w każdym punkcie do zbocza góry. Oblicz najmniejszą odległość, na jaką Syzyf zbliży się do wierzchołka góry, oraz maksymalną prędkość, z jaką wtacza kamień pod górę.
267. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCDE$ punkt O jest środkiem symetrii podstawy ostrosłupa. Stosunek obwodu podstawy $ABCD$ do sumy długości wszystkich krawędzi ostrosłupa jest równy $1:5$. Przez przekątną AC podstawy i środek S krawędzi bocznej BE poprowadzono płaszczyznę. Oblicz stosunek pola otrzymanego przekroju do pola podstawy ostrosłupa oraz miarę kąta BSO (w zaokrągleniu do 1°).
268. Pewna choroba dotyka $0,2\%$ całej populacji i w początkowym stadium nie daje widocznych objawów chorobowych. W ramach profilaktyki stosuje się pewien test przesiewowy, który daje wynik pozytywny lub negatywny. Prawdopodobieństwo tego, że test wykonany na osobie chorej da wynik pozytywny (oznaczający chorobę) jest równe $0,99$. Ponadto wiadomo, że prawdopodobieństwo tego, że test wykonany na osobie zdrowej da wynik negatywny, jest równe $0,98$. Pan X poddał się testowi, który dał wynik pozytywny. Pozytywny wynik oznacza podejrzenie choroby.
Oblicz prawdopodobieństwo tego, że Pan X jest rzeczywiście chory.
269. Rozwiąż równanie $\sin 4x - \cos 5x = 0$ w przedziale $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
270. Wykaż, że jeżeli zdarzenia losowe $A, B \subset \Omega$ są takie, że $P(A) = 0,6$ oraz $P(B) = 0,8$, to $P(A \mid B) \geqslant 0,5$. ($P(A \mid B)$ oznacza prawdopodobieństwo warunkowe zajścia zdarzenia A pod warunkiem zajścia zdarzenia B).
271. Niech $m = \log_{21} 7$. Wykaż, że $\log_7 27 = \frac{3(1-m)}{m}$
272. Oblicz najmniejszą liczbę naturalną n spełniającą nierówność $\left|\frac{2n-10}{3n+1} - \frac{2}{3}\right| < \frac{1}{30}$.
273. Dany jest wykres funkcji kwadratowej $f(x) = x^2$ oraz punkt $A = (3,0)$. Znajdź punkt na wykresie funkcji f leżący najbliżej punktu A.
274. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy jest równa $10cm$, a kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy jest równy $60°$. Ostrosłup ten przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy i nachyloną do płaszczyzny podstawy pod kątem $30°$. Oblicz pole otrzymanego przekroju.
275. Dany jest trójkąt ABC, w którym $A = (0,0), B = (6,0), C = (6p, 6q)$, gdzie $p, q > 0$ oraz $p \neq \frac{1}{2}$. Punkt H jest punktem przecięcia wysokości (ortocentrum) tego trójkąta. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie. Punkt S jest środkiem ciężkości tego trójkąta. Wyznacz równanie prostej OH i wykaż, że punkt S leży na tej prostej.
276. Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $|\measuredangle A| = 90°$. Przeciwprostokątna BC ma dłu-

gość a, dwusieczna AD kąta prostego ma długość d. Udowodnij, że pole trójkąta ABC jest równe $P = \frac{1}{4}\left(d^2 + d\sqrt{d^2 + 2a^2}\right)$.

277. Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny. Kąt α jest kątem dwuściennym między dwiema sąsiednimi ścianami bocznymi. Kąt β jest kątem przy podstawie ściany bocznej (tzn. kątem między krawędzią podstawy i krawędzią boczną ostrosłupa). Wykaż, ze $\cos\alpha \cdot \mathrm{tg}^2\beta = -1$.

10.04.2024r

278. (4pkt) Dany jest czworościan $ABCD$ o krawędzi $a = 6$. Oblicz $cos(\sphericalangle APD)$, jeśli punkt P jest przecięciem wysokości czworościanu poprowadzonej z wierzchołków A i D.
279. (4 pkt) Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$mx^2 - 3(m+1)x + m = 0$$

nie ma rozwiązania w zbiorze liczb rzeczywistych.
280. (3 pkt) Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x i każdej liczby rzeczywistej m prawdziwa jest nierówność

$$20x^2 - 24mx + 18m^2 \geq 4x + 12m - 5.$$

281. (5 pkt) Pierwiastkiem równania $2x^3 - (3m-1)x^2 + 7x - m = 0$ jest liczba -1. Wyznacz wartość parametru m oraz pozostałe pierwiastki tego równania.
282. (5 pkt) Sporządź wykres funkcji $f(x) = \left|\frac{x-4}{x-2}\right|$, a następnie korzystając z tego wykresu, wyznacz wszystkie wartości parametru k, dla których równanie $\left|\frac{x-4}{x-2}\right| = k$, ma dwa rozwiązania, których iloczyn jest liczbą ujemną.
283. (5 pkt) Suma n początkowych, kolejnych wyrazów ciągu (a_n), jest obliczana według wzoru

$$S_n = n^2 + 3n, \quad (n \in \mathbb{N}_+).$$

Wyznacz a_n. Wykaż, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.
284. (4 pkt) Dany jest ciąg trójkątów równobocznych takich, że bok następnego trójkąta jest wysokością poprzedniego. Oblicz sumę pól wszystkich tak utworzonych trójkątów, przyjmując, że bok pierwszego trójkąta ma długość a, $(a > 0)$.
285. (6 pkt) Oblicz sumę wszystkich pierwiastków równania

$$\sin 3x = ctg\frac{25}{2}\pi,$$

które spełniają nierówność $|x - 5\pi| \leq 5\pi$.
286. (5 pkt) W trójkącie jeden z kątów ma miarę $120°$. Długości boków tego trójkąta są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, którego suma wynosi 30. Wyznacz stosunek długości promienia okręgu opisanego na tym trójkącie do długości promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.
287. (4 pkt) Na kole opisany jest romb. Stosunek pola koła do pola rombu wynosi $\frac{\pi\sqrt{3}}{8}$. Wyznacz miarę kąta ostrego rombu.
288. (3 pkt) Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których prosta o równaniu

$$y = mx + (2m+3)$$

ma dokładnie dwa punkty wspólne z okręgiem o środku w punkcie $S = (0,0)$ i promieniu $r = 3$.
289. (4 pkt) Wybierz dwie dowolne przekątne sześcianu i oblicz cosinus kąta między nimi. Sporządź odpowiedni rysunek i zaznacz na nim kąt, którego cosinus obliczasz.
290. (4 pkt) Rzucamy siedem razy symetryczną kostką sześcienną. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, polegającego na tym, że „jedynka” wypadnie co najmniej pięć razy.

SET 7 cz. 1 – 17.04.2024r

291. (3p) Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x oraz dla każdej liczby rzeczywistej y, spełniających warunek $x+y \geq 1$, prawdziwa jest nierówność

$$x^3+2xy+y^3 \geq x^2+xy(x+y)+y^2$$

292. (3 pkt) Wykaż, że jeżeli $A=3^{4\sqrt{2}+2}$ i $B=3^{2\sqrt{2}+3}$, to $B=9\sqrt{A}$.

293. (4 pkt) Wykaż, że nierówność $\sqrt[4]{\frac{a^4+b^4}{2}} \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ jest spełniona przez wszystkie liczby rzeczywiste a i b.

294. (4 pkt) Uzasadnij, że jeżeli $a \neq b, a \neq c, b \neq c$ i $a+b=2c$, to $\frac{a}{a-c}+\frac{b}{b-c}=2$.

295. (3 pkt) Udowodnij, że jeżeli $a+b \geq 0$, to prawdziwa jest nierówność $a^3+b^3 \geq a^2b+ab^2$.

296. (3 pkt) Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c i d prawdziwa jest nierówność $ac+bd \leq \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{c^2+d^2}$.

297. (3 pkt) Udowodnij, że dla każdych dwóch liczb rzeczywistych dodatnich x, y prawdziwa jest nierówność $(x+1)\frac{x}{y}+(y+1)\frac{y}{x}>2$.

298. (3 pkt) Wykaż, że jeżeli $a>b \geq 1$, to $\frac{a}{2+a^3}<\frac{b}{2+b^3}$.

299. (3 pkt) Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej x różnej od 1 oraz dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej y różnej od 1 prawdziwa jest równość

$$\log_x(xy) \cdot \log_y\left(\frac{y}{x}\right)=\log_y(xy) \cdot \log_x\left(\frac{y}{x}\right).$$

300. (3 pkt) Niech $a=\log_{12} 2$. Wykaż, że $\log_6 64=\frac{6a}{1-a}$.

301. (3 pkt) Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x i y takich, że $x^2+y^2=2$, prawdziwa jest nierówność $x+y \leq 2$.

302. (4 pkt) Wykaż, że dla $a, b, c, d>0$ prawdziwa jest nierówność $\sqrt{a+b} \cdot \sqrt{c+d} \geq \sqrt{ac}+\sqrt{bd}$.

303. (3 pkt) Udowodnij, że dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność

$$x^2y^2+2x^2+2y^2-8xy+4>0.$$

304. (3 pkt) Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y prawdziwa jest nierówność

$$5x^2+y^2-4xy+6x+9 \geq 0.$$

305. (3 pkt) Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x i y, takich że $x<y$, i dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej a, prawdziwa jest nierówność $\frac{x+a}{y+a}+\frac{y}{x}>2$.

306. (3 pkt) Niech $\log_2 18=c$. Wykaż, że $\log_3 4=\frac{4}{c-1}$.

307. (3 pkt) Niech $\log_2 9=c$. Wykaż, że $\log_3 54=\frac{3c+2}{c}$.

SET 7 cz. 2 – 24.04.2024r

Reszta z setu - te najciekawsze. Powinny pójść szybko, więc w środę w miarę możliwości omawiam całość.

308. (3 pkt) Udowodnij, że suma sześcianów trzech kolejnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 4 jest liczbą podzielną przez 36.

309. (3 pkt) Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y takich, że $2x > y$, spełniona jest nierówność

$$7x^3 + 4x^2y \geq y^3 + 2xy^2 - x^3.$$

310. (3 pkt) Liczby dodatnie a i b spełniają równość $a^2 + 2a = 4b^2 + 4b$. Wykaż, że $a = 2b$.

311. (3 pkt) Wykaż, że dla każdej liczby nieparzystej n wyrażenie $n^5 - 3n^4 - n + 3$ jest podzielne przez 16.

312. (3 pkt) Udowodnij, że dla każdej liczby nieparzystej n wyrażenie $n^5 - 3n^4 - n + 19$ jest podzielne przez 16.

313. (3 pkt) Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej k i dla każdej liczby całkowitej m liczba $k^3m - km^3$ jest podzielna przez 6.

314. (3 pkt) Reszta z dzielenia liczby naturalnej a przez 6 jest równa 1. Reszta z dzielenia liczby naturalnej b przez 6 jest równa 5. Uzasadnij, że liczba $a^2 - b^2$ jest podzielna przez 24.

315. (4 pkt) Uzasadnij, że dla każdej liczby całkowitej k liczba $k^6 - 2k^4 + k^2$ jest podzielna przez 36.

316. (5p) Wykaż bez użycia kalkulatora, że liczba

$$\sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}$$

jest liczbą całkowitą.

317. (3p) Wykaż, że jeżeli $a \neq b \neq c$ to

$$a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b) \neq 0.$$

318. (3p) Wykaż, że dla każdej dodatniej i różnej od jedności liczby a i dla każdej dodatniej i różnej od jedności liczby b spełniona jest równość

$$\frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_{a^2} b} + \frac{1}{\log_{a^3} b} + \ldots + \frac{1}{\log_{a^{10}} b} = \frac{55}{\log_a b}.$$

319. (3p) Dodatnie liczby rzeczywiste a, b takie, że $a > b$, spełniają warunek

$$\log_2\left(\frac{a - b}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\log_2 a + \log_2 b\right).$$

Wykaż, że dla liczb a, b prawdziwa jest równość

$$a^2 + b^2 = 11ab.$$

320. (4p) Wykaż, że jeśli dla $x, y, z \in \mathbb{C}$ zachodzi $3 \mid x + y + z$ to również $3 \mid x^3 + y^3 + z^3$.

321. (4p) Wykaż, że dla każdej liczby $m \in \mathbb{C}$ wyrażenie $m^6 - 2m^4 + m^2$ dzieli się przez 36.

322. (4p) Wykaż, że dla dowolnej liczby $x \in \mathbb{C}$ wyrażenie $x^5 - 5x^3 + 4x - 30$ dzieli się przez 30.

323. (4p) Wykaż, że jeśli $n \in \mathbb{N}$ to wyrażenie $4^{n+2} - 4^n$ dzieli się przez 60.

324. (4p) Wykaż, że jeśli $n \in \mathbb{N}$ to $10 \mid 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$

325. (4p) Wykaż, że dla dowolnej liczby całkowitej k wyrażenie $k(k+1)(k+9)(k^2+1)$ dzieli się przez 5.

326. (4p) Wykaż, że dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$ wyrażenie $n^5 - n$ dzieli się przez 5.

327. (4p) Wykaż, że jeśli n jest liczbą naturalną nieparzystą, to wyrażenie

$$\frac{n^6 - n^4 + n^3 - n}{n^2 - n + 1}$$

jest liczbą podzielną przez 48.

328. (3p) Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej k i każdej liczby całkowitej m liczba $k^3m - km^3$ jest podzielna przez 6.

329. (4p) Pierwiastkami wielomianu stopnia trzeciego są liczby $1, 3, 5$. Współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej tego wielomianu jest równy $\frac{1}{2}$. Uzasadnij, że dla każdej liczby całkowitej nieparzystej wartość tego wielomianu jest liczbą podzielną przez 24

330. (4p) Wykaż, że dla dowolnej nieparzystej liczby x, liczba $x^3 + 3x^2 - x - 3$ jest podzielna przez 48.

331. (4p) Wykaż, że jeśli p - liczba pierwsza, taka że $p \geq 5$ to $p^2 - 17$ dzieli się przez 8.

332. (4p) Wykaż, że jeśli p - liczba pierwsza, taka że $p \geq 5$ to $24 \mid p^2 - 73$.