Rozdział 1 Maturalna otwarta pracownia

1.1 28.10.2020r

1. Wyznacz wszystkie wartości parametru $m, m \in \mathbb{R}$, dla których funkcja $f(x) = (m^2 - 9)x^2 - 2(m-3)x - 3$ przyjmuje wartości ujemne dla każdej liczby rzeczywistej x.
2. Wyznacz wszystkie wartości parametru $m, m \in \mathbb{R}$, dla których funkcja $f(x) = x^2 + (2m+3)x + m^2 + 3m$ będzie miała dwa różne miejsca zerowe, z których jedno będzie mniejsze od 2, zaś drugie większe od $\frac{7}{3}$.
3. Dla jakich wartości parametru $m, m \in \mathbb{R}$ równanie $x^2 - |2x - 8| = m^3 + 2$ ma dwa pierwiastki różnych znaków?
4. Ustal, dla jakich wartości parametru $m, m \in \mathbb{R}$ równanie $x^2 + 2(m+1)x + m + 2 = 0$ ma dwa różne rozwiązania x_1, x_2 takie, że $|x_1| + |x_2| < 2\sqrt{11}$.
5. Rozwiąż nierówność $|x^2 - 5x - 6| + |x - 6| \geq 2|12 - 2x|$.
6. Rozwiąż nierówność $|2x^2 + 7x - 11| < x^2 + x + 3$
7. Wykaż, że dla dowolnej liczby pierwszej $p, p > 5$ liczba $p^2 + 11$ jest podzielna przez 12.
8. Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $n^3 + 5n$ jest podzielna przez 6.

1.2 04.11.2020r

9. Rozwiąż nierówność $\sqrt{(x^2 - |x| - 2)^2} > 2$.
10. Wyznacz wszystkie wartości parametru $m \in \mathbb{R}$ dla których zbiór rozwiązań nierówności $|x^2 - 4x + 3| \leq x - m$ jest jednoelementowy.
11. Wyznacz te wartości całkowitego parametru p, dla których równanie $x^3 + (p-1)x^2 + (1 - 2p)x - 6 = 0$ ma trzy różne miejsca zerowe, których suma kwadratów jest nie większa od 9.
12. Wyznacz wszystkie wartości rzeczywistego parametru m, dla których zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{x - m^2 - 2m + 1}{m^2 - 2 - x} > 0$ jest przedział $(2; 7)$.
13. Wielomian $W(x) = x^4 + 2x^3 + 7x^2 + 6x + 5$ zapisz w postaci iloczyniu dwóch trójmianów stopnia drugiego o współczynnikach całkowitych. Wykaż, że $W(x)$ nie ma miejsc zerowych.
14. Wykaż, że dla $x > 0$ prawdziwa jest nierówność $\frac{20x^2 + 2x + 5}{2x} \geq 11$.
15. Wykaż, że liczba $\sqrt{12 + 6\sqrt{3}} + \sqrt{12 - 6\sqrt{3}}$ jest całkowita.
16. Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej n, liczba $n^5 - n$ jest podzielna przez 30.
17. Wykaż, że jeśli liczba x przy dzieleniu przez 6 daje resztę y to liczba $(x+1)^3$ przy dzieleniu przez 6 daje resztę $y + 1$.

1.3 11.11.2020r

18. Dla jakich wartości parametru m równanie $2x^2-(m-1)x+m+1=0$ ma różne pierwiastki rzeczywiste spełniające warunek $|x_2-x_1|=1$?
19. Wyznacz całkowite wartości parametru a, dla których równanie $(a-1)x^2-(a^2+1)x+a^2+a=0$ ma pierwiastki całkowite.
20. Dla jakich wartości parametru k suma kwadratów pierwiastków równania $x^2+(k-3)x+k-5=0$ osiąga wartość najmniejszą?
21. Wyznacz wartość parametrów a,b tak, aby wielomian $x^4-3x^3+6x^2+ax+b$ był podzielny przez x^2-1.
22. Wyznacz sumę współczynników wielomianu $(x^3+x+1)^{50}+(2x^2-2x+1)^{30}$.
23. Dla jakich całkowitych wartości parametrów a,b liczba $1+\sqrt{3}$ jest pierwiastkiem wielomianu $3x^3+ax^2+bx+12$.
24. ★ Wykaż, że nie istnieje liczba a, dla której wielomian $1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3$ jest podzielny przez $(x-a)^2$.
25. Omów ilość rozwiązań równania $\frac{|x-1|}{x^2-1}=3m-1$ ze względu na wartość parametru m.

1.4 18.11.2020r

26. Sporządź wykres funkcji $f(x)=|\frac{2x}{x-2}|$.
27. Wyznacz współczynniki m,n wielomianu $W(x)=2x^3+mx^2-13x+n$, wiedząc, że liczby $2, oraz 3$ są jego pierwiastkami. Rozwiąż nierówność $W(x)\leq 0$.
28. Wyznacz współczynniki równania $x^3-ax^2+bx-c=0$, tak aby pierwiastkami tego równania były liczby a,b,c.
29. Suma S_n n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego jest równa sumie S_m m początkowych wyrazów tego ciągu. Wykaż, że $S_{m+n}=0$.
30. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru m równanie $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}+\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}=2mx-4$ ma dwa różne pierwiastki?
31. Pociąg miał przebyć pewną drogę w czasie 21 godzin. Niestety w połowie drogi zatrzymał się na 30 minut. Aby dotrzeć na miejsce punktualnie, musiał zwiększyć prędkość o $2\frac{km}{h}$. Jaka była planowana prędkość pociągu? Jaka była długość trasy, jeśli prędkość pociągu na poszczególnych odcinkach była stała?
32. Zbadaj, dla jakich wartości całkowitych parametru a wyrażenie $\frac{a^5+2}{a-1}$ osiąga wartość całkowitą.
33. Wykaż, że jeśli $mp=2(n+q)$ to chociaż jedno z równań $x^2+mx+n=0$, $x^2+px+q=0$ ma rozwiązanie.

1.5 25.11.2020r

34. Udowodnić metodą indukcji, że $\frac{1}{1*2}+\frac{1}{2*3}+\frac{1}{3*4}+\ldots+\frac{1}{n*(n+1)}=\frac{n}{n+1}$.
35. Udowodnić, że liczba 10^n-4 jest podzielna przez 6, dla dowolnego $n\in\mathbb{N}$.
36. Wykaż, że jeśli $x+y+z=0$, oraz $x^2+y^2+z^2=a$, to $x^4+y^4+z^4=\frac{a^2}{2}$.
37. Rozwiąż równanie $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$.
38. Rozwiąż nierówność $(x-1)\sqrt{x+4}<2-4x$.
39. Dla jakich wartości parametru $m\in\mathbb{R}$ rozwiązanie (x,y) układu równań
$$\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 4x+my=2m \end{cases}$$
należy do I ćwiartki układu współrzędnych?
40. Znaleźć maksimum funkcji $f(x)=\frac{2}{\sqrt{2x^2-4x+3}}$. Wyznaczyć zbiór wartości funkcji f.
41. Wykaż, że liczby $\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5}$ nie mogą być wyrazami jednego ciągu arytmetycznego.

1.6 02.12.2020r

42. Rozwiąż nierówność $|x-2|-|x-1|\leq|x+1|-5$
43. Dla jakich wartości parametru $k\in\mathbb{R}$ równanie $x^2-2x-(k^2+1)=0$ ma dwa różne pierwiastki x_1,x_2 takie, że $x_1\in(1+\sqrt{6};1+\sqrt{11})$, oraz $|x_1-x_2|<6$?
44. Wykaż, że ciąg (a_n), którego suma n początkowych wyrazów wyraża się wzorem $S_n=3n^2+2n+1$, nie jest ciagiem arytmetycznym.
45. Wyznacz ciąg geometryczny, w którym suma trzech pierwszych wyrazów wynosi $\frac{7}{2}$, zaś suma ich kwadratów wynosi $5,25$.
46. Czy trzy liczby mogą jednocześnie tworzyć ciąg arytmetyczny i geometryczny?
47. Obliczyć granicę ciągu $a_n=\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$.
48. Wykaż, że dla $k\in\mathbb{N}$ liczba $4k^2+15k-1$ jest podzielna przez 9.
49. Statek płynie Odrą z Wrocławia do Szczecina 3 dni, zaś ze Szczecina do Wrocławia 6 dni. Jaki jest czas przepływu wody Odry z Wrocławia do Szczecina?

1.7 09.12.2020r

50. Udowodnić równość $\cos 20^o \cos 40^o \cos 80^o = \frac{1}{8}$.
51. Rozwiąż nierówność $\sin x > \cos x$.
52. Wykaż, że jeśli $\cos(\alpha+\beta)=0$ to $\sin(\alpha+2\beta)=\sin\alpha$.
53. Wyznaczyć wzór na sumę $S_n = 1+2x+3x^2+4x^3+...+nx^{n-1}$.
54. Cztery liczby tworzą ciąg geometryczny. Suma wyrazów skrajnych wynosi 36, zaś środkowych 24. Wyznacz ten ciąg.
55. Iloraz ciągu geometrycznego wynosi $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Wykaż, że każdy wyraz tego ciągu (z wyjątkiem wyrazu pierwszego) jest różnicą wyrazów: następnego i poprzedniego.
56. Trzy liczby dodatnie tworzą ciąg gometryczny. Suma tych liczb wynosi 26, zaś suma ich odwrotności $\frac{13}{18}$. Znajdź ten ciąg.
57. Pierwszy, trzeci i piąty wyraz ciągu geometrycznego są odpowiednio pierwszym, czwartym i szesnastym wyrazem pewnego ciągu arytmetycznego. Znaleźć szósty wyraz ciągu arytmetycznego wiedząc, że pierwszy wyraz wynosi 5.

1.8 16.12.2020r

58. Uzasadnić, że dla $n \in \mathbb{N}, n > 3$ liczba $n^3+5n^2-2n-24$ jest iloczynem co najmniej czterech liczb pierwszych (niekoniecznie różnych).
59. Wyznaczyć zbiór wartości funkcji $f(x)=\sin x+\cos x$.
60. Dla jakich wartości parametru m rozwiązania równania $x^2+\frac{1}{m}x+m^2=0$ można przedstawić w postaci $x_1=\sin\alpha, x_2=\cos\alpha$ dla pewnego kąta $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$?
61. Rozwiąż nierówność $2sin^2 3x + sin^2 6x < 2$ na przedziale $<0;\pi>$.
62. Wykaż tożsamość $sin^6\alpha + cos^6\alpha = 1-\frac{3}{4}sin^2 2\alpha$.
63. Rozwiąż równanie $sin^3 x + cos^3 x = 1$.
64. Oblicz granicę ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = \sqrt{n^2+5n-1}-\sqrt{n^2-3n+7}$.
65. W trójkąt równoboczny o boku 1 wpisano trójkąt równoboczny, tak że jego wierzchołki pokryły się ze środkami boków pierwotnego trójkąta. W ten zaś wpisano następny trójkąt równoboczny w ten sam sposób i tak w nieskończoność. Oblicz sumę pól wszystkich otrzymanych w ten sposób trójkątów.

1.9 06.01.2021r.

66. (3pkt) Wyznacz wszystkie wartości parametru a, dla których równanie $|x-5|=(a-1)^2-4$ ma dwa różne rozwiązania dodatnie.
67. (3pkt) Liczby dodatnie a, b spełniają równość $a^2+2a=4b^2+4b$. Wykaż, że $a=2b$.
68. (4pkt) Rozwiąż równanie $3cos2x+10cos^2 x=24sinx-3$ dla $x \in <0;2\pi>$.

1.10 13.01.2021r.

69. (5pkt) W trzywyrazowym ciągu geometrycznym (a_1, a_2, a_3) spełniona jest równość $a_1 + a_2 + a_3 = \frac{21}{4}$. Wyrazy a_1, a_2, a_3 są - odpowiednio - czwartym, drugim i pierwszym wyrazem rosnącego ciągu arytmetycznego. Oblicz a_1.
70. (4pkt) Dane jest równanie kwadratowe $x^2 - (3m+2)x + 2m^2 + 7m - 15 = 0$ z niewiadomą x. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których różne rozwiązania x_1, x_2 tego równania istnieją i spełniają warunek $2x_1^2 + 5x_1x_2 + 2x_2^2 = 2$.
71. (4pkt) Oblicz, ile jest wszystkich siedmiocyfrowych liczb naturalnych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie trzy cyfry 1 i dokładnie dwie cyfry 2.
72. (1pkt) Oblicz granicę ciągu określonego wzorem ogólnym $a_n = \frac{3n^2+7n-5}{11-5n+5n^2}$.

1.10 13.01.2021r.

73. (3pkt) Wykaż, że wielomian $W(x) = x^4 - 3x^2 - 2x + 6$ nie ma pierwiastków rzeczywistych.
74. (5pkt) Wyznacz wszystkie rzeczywiste wartości parametru m, dla których funkcja $f(x) = (2m+2)x^2 + 2(2m-1)x - 2m + 3$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste spełniające warunek $x_1^2 - x_2^2 = x_1^4 - x_2^4$.
75. (6pkt) Suma wszystkich czterech współczynników wielomianu $W(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ jest równa 0. Trzy pierwiastki tego wielomianu tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy równej 4. Oblicz współczynniki a, b, c. Rozważ wszystkie przypadki.
76. (3pkt) Wykaż, że jeśli $x, y \in \mathbb{R}$, oraz $x^2 + y^2 = 2$, to $x + y \leq 2$.
77. (3pkt) Oblicz ile jest liczb naturalnych dziesięciocyfrowych, w zapisie których występują wyłącznie cyfry $2, 5, 6$, przy czym cyfra 2 występuje dokładnie trzy razy.
78. (4pkt) Rozwiąż równanie $2 + cos2x = -3cosx$ w przedziale $< -2\pi; \pi >$.
79. (4pkt) W pudełku znajduje się 8 karteczek z zapisanymi kolejnymi liczbami naturalnymi od 2 do 9. Losujemy jedną karteczkę, zapisujemy liczbę na niej występującą, a następnie zwracamy karteczkę do pudełka. Tę procedurę wykonujemy jeszcze dwa razy, tym samym otrzymując zapisane trzy liczby. Oblicz prawdopodobieństwo, że iloczyn trzech zapisanych liczb jest podzielny przez 4. Wynik zapisz w postaci ułamka nieskracalnego.
80. (6pkt) Liczby x, y, z są odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Suma tych liczb jest równa 27. Znajdź te liczby wiedząc, że ciąg $(a-2, b, 2c+1)$ jest geometryczny.

1.11 20.01.2021r.

81. (4p) Znajdź wszystkie rozwiązania równania $2sin^2 2x - 7cos2x - 5 = 0$ należące do przedziału $x \in < 0; 2\pi >$.
82. (4p) Rozwiąż nierówność $|2x + 2| + |x - 2| > 5$.

83. (5p) Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2-(m-4)x+m^2-4m=0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, których suma jest mniejsza od $2m^3-3$.
84. (4p) Ustal ilość rozwiązań równania $x^2-4|x|=m^2-1$ w zależności od wartości parametru m.
85. (4p) Wykaż, że dla dowolnych rzeczywistych liczb a, b spełniona jest nierówność $\sqrt[4]{\frac{a^4+b^4}{2}} \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.
86. (4p) Liczby $1,2,3,4,5,6,7,8$ ustawiamy losowo w szeregu. Oblicz prawdopodobieństwo, że w tym ustawieniu suma każdych dwóch sąsiednich liczb będzie nieparzysta. Wynik podaj w postaci ułamka nieskracalnego.
87. (5p) Ciąg (a,b,c) jest geometryczny i $a+b+c=26$, zaś ciąg $(a-5,b-4,c-11)$ jest arytmetyczny. Oblicz a,b,c.
88. (4p) Wyznacz wartości współczynników a,b wielomianu $W(x)=x^3+ax^2+bx+1$, wiedząc, że $W(2)=7$ oraz, że reszta z dzielenia $W(x)$ przez $(x-3)$ jest równa 10.

1.12 27.01.2021r

89. (2p) Liczba x z dzielenia przez 4 daje resztę 1. Liczba y z dzielenia przez 4 daje resztę 3. Oblicz resztę z dzielenia x^2+y^2 przez 8.
90. (3p) Oblicz ile jest liczb czterocyfrowych naturalnych parzystych, w których występuje dokładnie jedno zero.
91. (4p) Wyznacz iloraz nieskończonego, zbieżnego ciągu geometrycznego, w którym pierwszy wyraz jest równy 6, zaś suma wszystkich wyrazów ciągu jest równa $\frac{1}{8}$ sumy ich kwadratów.
92. (6p) Wykresy funkcji kwadratowych $f(x)=3x^2-2mx-m$, oraz $g(x)=mx^2+x+3$, dla $m\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ przecinają się w dwóch punktach. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których iloraz sumy odciętych tych punktów przez ich sumę jest o $\frac{1}{8}$ mniejszy od największej wartości funkcji g.
93. (2p) Ze zbioru liczb: $\{1,2,3,4,...,2n\}$, gdzie $n>2, n\in\mathbb{N}$ losujemy kolejno trzy razy po jednej liczbie bez zwracania. Niech A_n oznacza zdarzenie: iloczyn wylosowanych liczb jest liczbą nieparzystą, zaś $P(A_n)$ jest prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia A_n. Oblicz $lim_{n->+\infty}P(A_n)$.
94. (3p) Przy dzieleniu wielomianu $W(x)$ przez dwumian $(x-1)$ otrzymano resztę -3, przy dzieleniu przez dwumian $(x-2)$ resztę 6, zaś przy dzieleniu przez dwumian $(x+3)$ resztę 1. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x)=x^3-7x+6$.
95. (4p) Rozwiąż równanie $sin5x+sinx+2sin^2x=1$, dla $x\in<0;2\pi$.
96. (4p) Ustal, dla jakich wartości parametru $m\in\mathbb{R}$ dwa różne pierwiastki x_1,x_2 równania $x^2-4(m+1)x+2m^2-2m=0$ spełniają warunek $x_1<m<x_2$.

1.13 03.02.2021r

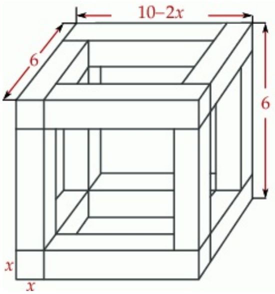
97. (6p) O funkcji g wiadomo, że $g(x)+g^2(x)+g^3(x)+\ldots=x$, gdzie lewa strona jest sumą szeregu geometrycznego zbieżnego. Dla jakich wartości parametru $m\in\mathbb{R}$ równanie $|g(x)|=m$ posiada dwa rozwiązania?
98. (3p) Wiedząc, że $P(A'\cup B')=\frac{4}{7}$, oraz $P(A\setminus B)=\frac{1}{3}$. Wykaż, że $P(B|A)<\frac{5}{8}$.
99. (5p) Rozwiąż nierówność $|x^3-1|<x^2+x+1$.
100. (6p) Rozwiąż równanie $sinx+sin2x=sin3x$ w przedziale $x\in<0;2\pi>$.
101. (4p) Dla jakich wartości parametru $m\in\mathbb{R}$ suma kwadratów pierwiastków równania $x^2+(m-3)x+m-5=0$ jest najmniejsza?
102. (5p) Trzy liczby tworzą ciąg geometryczny. Suma tych liczb wynosi 28. Równocześnie liczby te są pierwszym, drugim oraz czwartym wyrazem ciągu arytmetycznego. Jakie to liczby?
103. (5p) Doświadczenie polega na ośmiokrotnym rzucie kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo wystąpienia każdej liczby oczek przynajmniej raz. Wynik podaj w postaci ułamka nieskracalnego.
104. (3p) Oblicz, ile kilogramów wody należy odparować z jednego kilograma roztworu wody z solą o 10% zawartości soli, by zawartość procentowa soli w roztworze wyniosła 25%.

1.14 17.02.2021r.

105. (3p) Dla jakich wartości parametru m prosta dana równaniem $y=5x+m$ jest styczna do wykresu funkcji $f(x)=\frac{x+3}{2-x}$?
106. (3p) Wyznacz równania stycznych poprowadzonych do wykresu funkcji $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$, nachylonych do osi Ox pod kątem 45^o.
107. (4p) Funkcja W jest wielomianem trzeciego stopnia, przyjmującym wartości ujemne w zbiorze $x\in(-1;3)\cup(3;\infty)$. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji W w punkcie $x_0=\frac{3}{2}$, równoległej do prostej $4y-7x+2=0$.
108. (4p) Wyznacz kąt pod jakim przecinają się wykresy funkcji $f(x)=\frac{4}{x}-2$, oraz $g(x)=\frac{5}{8}x^2-x+\frac{19}{8}$.
109. (4p) Prosta dana równaniem $y=ax$ przecina wykres funkcji $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$ w punktach A,B. Udowodnij, że styczne poprowadzone do funkcji f w tych punktach przecinają się pod kątem prostym.
110. (4p) Dana jest funkcja $f(x)=\frac{x^2+ax+3}{x+b}$. Wyznacz współczynniki a,b wiedząc, że punkt $P(1;3)$ należy do wykresu funkcji f, oraz, że styczna do wykresu funkcji f poprowadzona w punkcie P jest prostopadał do prostej $2x+y+7=0$.

1.15 24.02.2021r.

111. (5p) Oblicz jakie długości powinny mieć boki prostokąta o polu P, tak aby jego przekątna miała najmniejszą możliwość długość.
112. (7p) Rozpatrujemy czworokąty $ABCD$, w które można wpisać okrąg, oraz można na nich opisać okrąg. Stosunek długości boków AB do BC wynosi $\frac{2}{5}$, zaś obwód całego czworokąta wynosi 10. Wiedząc, że pole czworokąta wpisanego w okrąg można obliczć ze wzoru $P = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, gdzie p - połowa obwodu czworokąta, zaś a, b, c, d - długości jego boków, zapisz pole czwotokąta $ABCD$ jako funkcję zmiennej x. Wyznacz dziedzinę tej funkcji i wyznacz długości boków tego czworokąta, którego pole jest największe.
113. (7p) Ze wszystkich stożków o tworzącej długości l wybrać ten, który ma największą objętość. Obliczyć tę objętość.
114. (7p) Na osi Oy dany jest odcinek o końcach w punktach $(0; a)$, $(0; b)$, gdzie $b > a > 0$. Na dodatniej półosi Ox znaleźć taki punkt, z którego dany odcinek widać pod największym kątem. (Wskazówka: Wprowadzić szukany punkt jako $(x; 0)$, oraz wyznaczyć funkcję trygonometryczną (np, tangens) kąta pod jakim widać dany odcinek).
115. (7p) Rozpatrujemy wszystkie możliwe drewniane szkielety o kształcie przedstawionym na rysunku, wykonane z listewek. Każda z tych listewek ma kształt prostopadłościanu o podstawie kwadratu o boku x. Wymiary szkieletu zaznaczono na rysunku.



Wyznacz objętość V drewna potrzebnego do budowy szkieletu jako funkcję zmiennej x. Wyznacz dziedzinę funkcji V.
Oblicz tę wartość x, dla której zbudowany szkielet jest możliwie najcięższy, czyli kiedy funkcja V osąga wartość największą objętość. Oblicz tę największą objętość.
116. (7p) W ostrosłup prawidłowy czworokątny o wysokości H wpisano sześcian tak, że cztery jego wierzchołki należą do krawędzi bocznych ostrosłupa, a cztery pozostałe należą do płaszczyzny jego podstawy. Oblicz dla jakiej długości krawędzi podstawy ostrosłupa stosunek objętości ostrosłupa do objętości sześcianu jest najmniejszy możliwy.

117. (7p) W stożek o promieniu r i wysokości h wpisujemy graniastosłupy sześciokątne prawidłowe tak, że jedna podstawa jest zawarta w podstawie stożka, a pozostałe wierzchołki należą do powierzchni bocznej stożka. Podaj wymiary graniastosłupa o największym polu powierzchni bocznej.

1.16 03.03.2021r

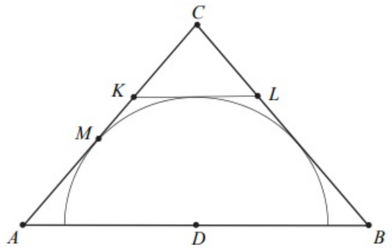
118. Wykaż, że dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$ liczba $n^3 - 3n^2 + 2n - 3$ jest podzielna przez 3
119. Wykaż, że dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$ liczba $n^3 + 17n$ jest podzielna przez 6
120. Wykaż, że dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$ wyrażenie $n^5 - n$ dzieli się przez 5.
121. Wykaż, że jeśli p - liczba pierwsza, taka że $p \geq 5$ to $p^2 - 17$ dzieli się przez 8.
122. Wykaż, że jeśli $x, y \in \mathbb{R}$, to $x^2 + y^2 + 1 \geqslant xy + x + y$.
123. Wykaż, że dla dowolnych liczb $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi $5x^2 + 4x - 2xy + y^2 + 2 \geqslant 0$.
124. Wykaż prawdziwość implikacji $x, y \in \mathbb{R} \implies x(x-1) + y(y-1) \geqslant xy - 1$.
125. Wykaż, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}_+$ zachodzi $x(x+1) + y(y+1) > 2xy$.

1.17 10.03.2021r.

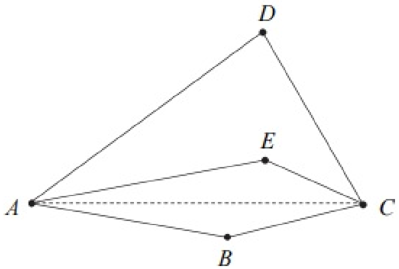
126. Udowodnij, że jeśli liczby całkowite x, y, z spełniają równanie $x^2 + y^2 = z^2$ to co najmniej jedna z nich dzieli się przez 3.
127. Wykaż, że jest dokładnie osiem liczb całkowitych k dla których wyrażenie $\frac{3k-1}{k+3}$ przyjmuje wartość całkowitą.
128. Wykaż, że jeśli $x + y + z = 0$ to $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.
129. Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej k i każdej liczby całkowitej m liczba $k^5m - km^5$ jest podzielna przez 10.
130. Wykaż, że dla dowolnej liczby $m \in \mathbb{C}$, wartość wyrażenia $m^6 - 2m^4 + m^2$ jest liczbą podzielną przez 6.
131. Wykaż, że jeśli liczby $x, y, z \neq 0$ spełniają równanie $x^3 + y^3 = 2z^3$ to $\frac{1}{x^2+xz+z^2} + \frac{1}{z^2+zy+y^2} = \frac{2}{x^2+xy+y^2}$.
132. Wykaż, że suma sześcianów trzech kolejnych liczb naturalnych jest liczbą podzielną przez 9.
133. Zdarzenia losowe $A, B \subset \Omega$, oraz $P(B) > \frac{1}{2}$. Wykaż, że $2P(A') + P(A|B) < 2$.
134. O zdarzeniach A, B wiadomo że są niezależne (czyli, że $P(A \cap B) = P(A)P(B)$), oraz $P(A - B) = \frac{1}{6}, P(B - A) = \frac{1}{4}$. Oblicz $P(A \cup B)$.
135. Wykaż, że jeżeli $A, B \subset \Omega$ oraz $P(A') = \frac{1}{3}$, $P(B') = \frac{1}{2}$, to $P((A' \cup B) \cap A) \geq \frac{1}{6}$.

1.18 24.03.2021r.

136. Wykaż, że jeśli dla zdarzeń losowych $A, B \subset \Omega$ zachodzi $P(A') = \frac{1}{3}$, oraz $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$, to $P(B) \geq \frac{1}{12}$.
137. Wykaż, że jeśli $A, B \subset \Omega$, oraz $P(A \cup B) = 1$, przy czym zdarzenia A, B są niezależne, to jedno z tych zdarzeń jest zdarzeniem pewnym.
138. Sprawdź czy zdarzenia $A, B \subset \Omega$ się wykluczają, jeśli $P(A \cap B') = \frac{1}{15}, P(A' \cap B) = \frac{1}{60}, P(A' \cap B') = \frac{11}{12}$.
139. Dane są zdarzenia losowe $A, B \subset \Omega$ takie, że $P(A) = \frac{2}{7}$ i $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$. Oblicz $P(B - A)$.
140. Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AC| = |BC| = 6$, a punkt D jest środkiem podstawy AB. Okrąg o środku D jest styczny do prostej AC w punkcie M. Punkt K leży na boku AC, punkt L leży na boku BC, odcinek KL jest styczny do rozważanego okręgu, oraz $|KC| = |LC| = 2$. Wykaż, że $\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{4}{5}$.

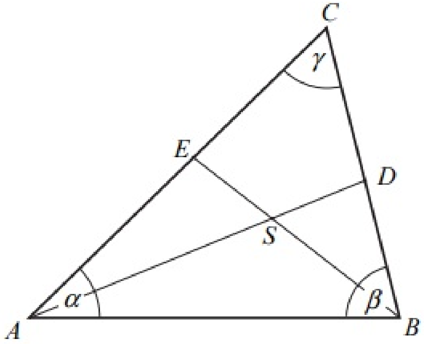


141. Dwusieczne kątów BAD i BCD czworokąta wypukłego $ABCD$ przecinają się w punkcie E, przy czym punkty B i E leżą po przeciwnych stronach prostej AC. Wykaż, że $|\angle ABC| - |\angle ADC| + 2|\angle AEC| = 360^o$.

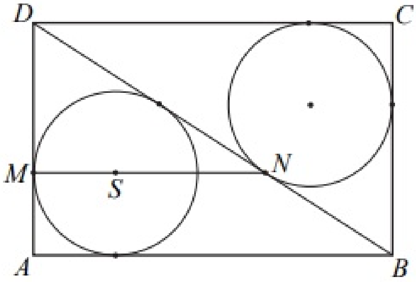


142. Miary kątów trójkąta ABC są równe $\alpha = |\angle BAC|$, $\beta = |\angle ABC|$, $\gamma = |\angle ACB|$. Punkt S jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt, a proste zawietające odcinki AS, BS,

przecinają boki BC, AC tego trójkąta w punktach odpowiednio D, E. Wykaż, że jeżeli $\alpha+\beta=2\gamma$, to na czworokącie $DCES$ można opisać okrąg.



143. Dany jest prostokąt $ABCD$. Okrąg wpisany w trójkąt BCD jest styczny do przekątnej BD w punkcie N. Okrąg wpisany w trójkąt ABD jest styczny do boku AD w punkcie M, a środek S tego okręgu leży na odcinku MN, jak na rysunku. Wykaż, że $|MN|=|AD|$.



144. W trójkącie prostokątnym studunek różnicy długości przyprostokątnych do długości przeciwprostokątnej wynosi $\frac{1}{2}$. Oblicz cosinusy kątów ostrych tego trójkąta.
145. Punkty $A(-7,-2), B(4,-7)$ są wierzchołkami podstawy trójkąta równoramiennego ABC, a wysokość opuszczona z wierzchołka A tego trójkąta zawiera się w prostej o równaniu $2x+19y+52=0$. Oblicz współrzędne wierzchołka C.

1.19 31.03.2021r

146. Na krzywej $y^2=4x$ znajdź punkt leżący najbliżej prostej $l: 2x-y+4=0$

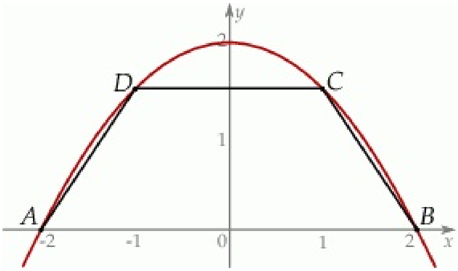
147. Prosta l, na której leży punkt $A = (2,5)$, przecina parabolę o równaniu$y = x^2$ w dwóch różnych punktach $B = (x_1, y_1)$ i$C = (x_2, y_2)$. Oblicz wartość współczynnika kierunkowego prostej l, przy której suma $y_1 + y_2$ osiągnie wartość najmniejszą.

148. Dwa wierzchołki prostokąta leżą na osi Ox, a pozostałe dwa należą do paraboli o równaniu $f(x) = 4 - x^2$ i znajdują się powyżej osi Ox.
   (a). Podaj wzór funkcji opisującej pole tego prostokąta w zależności od jego podstawy.
   (b). Dla jakiej długości podstawy pole tego prostokąta jest równe 6.
   (c). Dla jakiej długości podstawy pole tego prostokąta jest największe?

149. Na paraboli o równaniu $y = x^2 + 6x + 5$ znajdź współrzędne punktu A, którego odległość od prostej o równaniu $y = 2x - 13$ jest najmniejsza.

150. Znajdź taki punkt P leżący na prostej l o równaniu$x = 0$, z którego odcinek AB, gdzie $A = (4,0), B = (28,0)$, widać pod możliwie największym kątem. Wyznacz ten kąt.

151. Parabola o równaniu $y = 2 - \frac{1}{2}x^2$ przecina oś Ox układu współrzędnych w punktach $A = (2,0)$ i $B = (2,0)$. Rozpatrujemy wszystkie trapezy równoramienne $ABCD$, których dłuższą podstawą jest odcinek AB, a końce C i D krótszej podstawy leżą na paraboli.



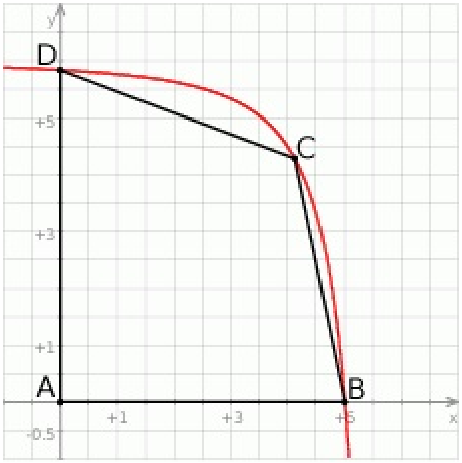
Wyznacz pole trapezu $ABCD$ w zależności od pierwszej współrzędnej wierzchołka C. Oblicz współrzędne wierzchołka C tego z rozpatrywanych trapezów, którego pole jest największe.

152. Dana jest parabola o równaniu $y = -x^2 + 9$. Na tej paraboli leży punkt P o dodatnich współrzędnych. Wyznacz współrzędne tego punktu tak, by styczna do paraboli w punkcie P ograniczała wraz z osiami układu współrzędnych trójkąt o najmniejszym polu.

1.20 14.04.2021r.

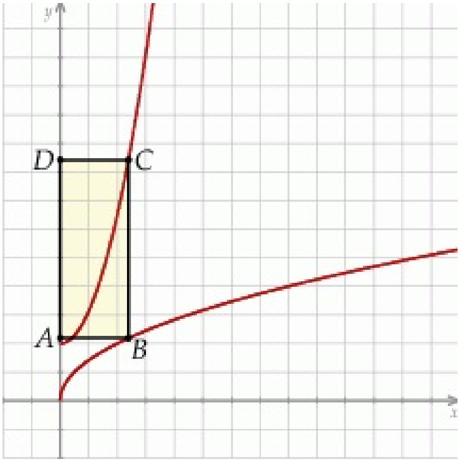
153. Na rysunku poniżej przedstawiono fragment wykresu funkcji $f(x) = \frac{6x^2 - 72x + 210}{x^2 - 12x + 36}$ określonej dla $x \in (\infty, 6)$. Wykres ten przecina osie Ox i Oy odpowiednio w punktach B i D, a punkt A jest początkiem układu współrzędnych. Rozpatrujemy wszystkie

czworokąty $ABCD$, w których punkt C leży na wykresie funkcji $y = f(x)$ pomiędzy punktami B i D.



Oblicz pierwszą współrzędną wierzchołka C tego z rozpatrywanych czworokątów, którego pole jest największe.

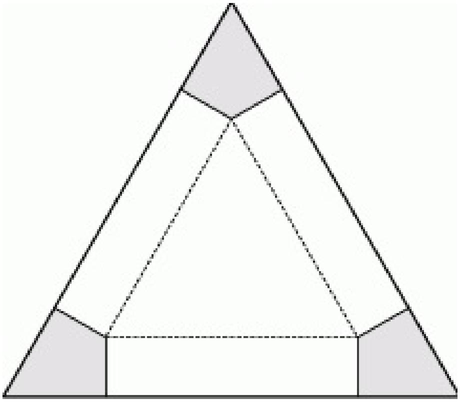
154. Rozpatrujemy prostokąty $ABCD$, których dwa wierzchołki leżą na osi Oy, jeden wierzchołek leży na paraboli określonej równaniem $y = \frac{9}{4}x^2 + 1$, jeden wierzchołek leży na wykresie funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ określonej dla $x \geq 0$. Oblicz pole tego z tych prostokątów, który ma najmniejszy możliwy obwód.



155. Na wykresie funkcji $y = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 5x^2 + 22x + 50$ znajdź punkt, którego odległość od prostej $l : y = -2x - 22$ jest najmniejsza możliwa.

156. Zakład produkcyjny planuje wytwarzanie pojemników o objętości 1728 litrów, które mają kształt otwartego graniastosłupa prawidłowego czworokątnego. Koszt produkcji $1dm^2$ podstawy tego pojemnika wynosi $0,3$zł, a koszt produkcji $1dm^2$ jego ścian bocznych wynosi $0,2$zł. Ponadto, do kosztu produkcji należy doliczyć niezbędne wzmocnienie krawędzi podstawy w cenie $4,2$zł za $1dm$ długości. Oblicz jakie powinny być wymiary tego pojemnika tak, aby koszt jego produkcji był najmniejszy możliwy.

157. Z kartonu w kształcie trójkąta równobocznego o boku długości $120cm$ odcięto trzy identyczne czworokąty w narożnikach (zobacz rysunek).



Następnie zagięto karton wzdłuż linii przerywanych, tworząc w ten sposób pudełko w kształcie graniastosłupa trójkątnego prostego (bez przykrywki). Oblicz długość krawędzi podstawy tego pudełka, którego objętość jest największa. Oblicz tę objętość.

158. Drut o długości $72cm$ rozcięto na dwa kawałki i z każdego kawałka zbudowano brzeg trójkąta równoramiennego, przy czym stosunek długości ramienia do długości podstawy w jednym trójkącie wynosi $5 : 8$, a w drugim $13 : 10$. Jakie obwody mają te trójkąty jeżeli suma ich pól jest najmniejsza z możliwych?

159. Dwóch egzaminatorów (z matury 2021 ofc), pracując razem, jest w stanie sprawdzić arkusze w czasie 8 godzin. Jeżeli każdy z nich wykonywałby tę pracę sam, to pierwszy, bardziej doświadczony zakończyłby ją o 12 godzin wcześniej niż drugi. W ciągu ilu godzin każdy z egzaminatorów wykonałby tę pracę samodzielnie?

160. Woda może wpływać do basenu z dwóch kranów. Za pomocą pierwszego kranu basen można napełnić w czasie o 2 godziny dłuższym, a za pomocą drugiego kranu w czasie o $4,5$ godziny dłuższym, niż przy napełnianiu basenu z wykorzystaniem obu kranów. W jakim

czasie można napełnić ten basen odkręcając tylko pierwszy albo tylko drugi kran?

1.21 09.05.2021r.

161. Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej a

$$\frac{a^2+3}{\sqrt{a^2+2}} > 2$$

162. Do wykresu funkcji $f(x) = x^3 - 3x - 2$ poprowadzono styczną l w punkcie A o odciętej $x = -2$. Prosta l przecina wykres funkcji f w pukcie $B \neq A$. Wyznacz współrzędne punktu B.
163. Oblicz ile jest liczb dwudziestocyfrowych, których suma cyfr jest równa 8 i jednocześnie w ich zapisie nie występują cyfry 1 i 6.
164. W trójkącie ABC dane są: $c = 6, sin\gamma = \frac{1}{4}, a^2 - b^2 = 16$. Wykaż, że $sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{9}$.
165. Wyznacz wszystkie wymierne pierwiastki wielomianu $W(x) = 2x^3 - 5x^2 - 28x + 15$.
166. Rozważamy zbiór wszystkich trapezów równoramiennych o przekątnej długości $10\sqrt{6}$. Wyznacz sumę długości podstaw tego trapezu, którego pole jest największe. Wyznacz to największe pole.
167. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, dla których dwa różne rozwiązania równania $x^2 - 2(k-3)x - k + 3 = 0$ należą do przedziału $(-2; 0)$.
168. W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczne AD i CE, gdzie punkty D i E leżą odpowiednio na bokach BC, AB. Dwusieczne te przecięły się w punkcie P. Wykaż, że jeśli na czworokącie $PEBD$ można opisać okrąg, to $|\sphericalangle PAC| + |\sphericalangle ACP| = 60^o$.
169. Wykaż, że jeśli stosunek promienia okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny do promienia okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy $\sqrt{2} - 1$ to trójkąt ten jest równoramienny.