

Ciąg arytmetyczny

7.41. Które z podanych ciągów są ciągami arytmetycznymi?

a) $a_n = 3n + 1$;

f) $a_n = \sqrt{2n}$;

b) $a_n = \frac{2n - \sqrt{2}}{3}$;

g) $a_n = \pi n + \pi$;

c) $a_n = 7$;

h) $a_n = \frac{2n^2 + 4n + 2}{n + 1}$;

d) $a_n = 2n$;

i) $a_n = \frac{n}{n^2 + 6}$;

e) $a_n = 5n^2 - 7$;

j) $a_n = \frac{n^2 - 9}{n + 3}$.

7.42. Znajdź trzynasty wyraz ciągu arytmetycznego, jeśli:

a) $a_1 = -1$, $r = 3$;

d) $a_2 = 3$, $a_6 = 4$;

b) $a_1 = 10$, $r = -2$;

e) $a_5 = 0$, $a_6 = -1,5$;

c) $a_1 = 0,75$, $r = 0,5$;

f) $a_3 - a_1 = -1$, $a_7 = 9$.

7.43. Wyznacz pierwszy wyraz a_1 ciągu arytmetycznego, mając dane:

a) $a_{22} = -92$, $r = -3$;

d) $a_{111} = 44$, $r = 1,25$;

b) $a_7 = 37$, $r = 5,5$;

e) $a_{17} = 100 \frac{2}{9}$, $r = 5 \frac{4}{9}$;

c) $a_{39} = 15,4$, $r = 0,4$;

f) $a_{47} = 20,78$, $r = 0,5$.

7.44. Wyznacz różnicę r ciągu arytmetycznego, mając dane:

a) $a_1 = 7$, $a_{29} = 133$;

d) $a_1 = 3\sqrt{3}$, $a_{16} = -42\sqrt{3}$;

b) $a_1 = -12$, $a_{34} = 65$;

e) $a_1 = \frac{3}{7}$, $a_{99} = 21 \frac{3}{7}$;

c) $a_1 = 28,5$, $a_{46} = 6$;

f) $a_1 = -9,1$, $a_{17} = -47,5$.

7.45. Wyznacz liczbę n wyrazów ciągu arytmetycznego, wiedząc, że:

a) $a_1 = 5$, $a_n = 61$, $r = 7$;

d) $a_1 = 2 \frac{2}{3}$, $a_n = 33 \frac{1}{3}$, $r = 1 \frac{1}{3}$;

b) $a_1 = -27$, $a_n = 15$, $r = 3,5$;

e) $a_1 = 6,3$, $a_n = -15,4$, $r = -0,7$;

c) $a_1 = 2,3$, $a_n = 48,8$, $r = 3,1$;

f) $a_1 = -14,1$, $a_n = -21,54$, $r = -0,08$.

7.46. Wyznacz wzór na n -ty wyraz ciągu, którego suma n początkowych wyrazów wyraża się wzorem:

a) $S_n = 3n^2 - n$;

c) $S_n = 5n - n^2$;

b) $S_n = n^2 - 4n$;

d) $S_n = \frac{1}{2}n - \frac{1}{4}n^2$.

Wykaż, że każdy z tych ciągów jest ciągiem arytmetycznym.

7.47. Wyznacz liczbę n wyrazów ciągu arytmetycznego, mając dane:

a) $S_n = 407$, $a_1 = 62$, $a_n = 12$;

d) $S_n = 204$, $r = 6$, $a_n = 49$;

b) $S_n = 1016,5$, $a_1 = 22$, $a_n = 85$;

e) $S_n = 578$, $a_1 = 58$, $r = -3$;

c) $S_n = 420$, $a_1 = 7$, $r = 3$;

f) $S_n = 456$, $r = -12$, $a_n = 15$.

7.48. Wyznacz różnicę r wyrazów ciągu arytmetycznego, mając dane:

a) $S_n = 518$, $a_1 = 50$, $n = 14$;

c) $S_n = 1675$, $n = 25$, $a_n = 1$;

b) $S_n = 728$, $n = 16$, $a_n = 63$;

d) $S_n = 2241$, $n = 27$, $a_n = 148$.

7.49. Znajdź sumę trzydziestu kolejnych liczb będących wielokrotnościami 9 (zaczynając od 9).

7.50. Znajdź sumę pięćdziesięciu kolejnych liczb będących wielokrotnościami 12 (zaczynając od 24).

7.51. Znajdź sumę:

a) wszystkich liczb całkowitych od 0 do 150 włącznie;

b) wszystkich liczb parzystych od 0 do 150 włącznie;

c) wszystkich liczb nieparzystych od 0 do 150.

7.52. Suma stu kolejnych liczb naturalnych, które przy dzieleniu przez 7 dają resztę 2, wynosi 43950. Wyznacz najmniejszą i największą z tych liczb.

7.53. Między liczby 4 i 22 wstaw pięć liczb tak, aby wraz z danymi liczbami tworzyły ciąg arytmetyczny.

7.54. Między liczby 65 i 35 wstaw dziewięć liczb tak, aby wraz z danymi liczbami tworzyły ciąg arytmetyczny.

7.55. Ile liczb trzeba wstawić między liczby 16 i 250, aby otrzymać ciąg arytmetyczny, którego suma wynosi 1995?

7.56. Suma czwartego i siódmego wyrazu ciągu arytmetycznego wynosi 86, a suma drugiego i trzynastego wyrazu tego ciągu jest równa 22. Znajdź pierwszy wyraz i różnicę tego ciągu.

7.57. Suma dwóch pierwszych wyrazów ciągu arytmetycznego równa się 27, suma dwóch ostatnich wyrazów wynosi 105, a siódmy wyraz jest równy 30. Znajdź pierwszy wyraz i liczbę wyrazów tego ciągu.

7.58. Drugi, szósty i ostatni wyraz ciągu arytmetycznego wynoszą odpowiednio 2, 22 i 222. Znajdź pierwszy wyraz i liczbę wyrazów tego ciągu.

7.59. Dane są dwa ciągi arytmetyczne: $1, 4, 7, \dots$ oraz $20, 21, 22, \dots$. Zsumowano n początkowych wyrazów pierwszego ciągu i n początkowych wyrazów drugiego ciągu. Okazało się, że otrzymano równe sumy. Wyznacz n .

7.60. Liczbę 210 podziel na siedem składników tak, aby tworzyły one ciąg arytmetyczny i największy z nich był trzy razy większy od najmniejszego składnika.

7.61. W ciągu arytmetycznym składającym się z dziewięciu wyrazów suma trzech pierwszych wyrazów równa się 15, a suma trzech następnych wynosi 42. Oblicz sumę trzech ostatnich wyrazów tego ciągu.

7.62. W ciągu arytmetycznym o nieparzystej liczbie wyrazów suma wyrazów stojących na miejscach nieparzystych równa się 44, a suma pozostałych wynosi 33. Znajdź wyraz środkowy i liczbę wyrazów tego ciągu.

7.63. Wyznacz pierwszy wyraz i różnicę ciągu arytmetycznego, jeśli:

a) $a_3 + a_5 = 24$ i $a_3 \cdot a_5 = 135$;

b) $a_9 - a_6 = 21$ i $a_9 \cdot a_6 = 2146$.

7.64. W ciągu arytmetycznym piąty wyraz równa się 25, a iloraz otrzymany po podzieleniu wyrazu dwunastego przez trzeci jest o 2 większy od ilorazu otrzymanego po podzieleniu wyrazu szesnastego przez ósmy. Znajdź pierwszy wyraz i różnicę tego ciągu.

7.65. Trzy liczby tworzą ciąg arytmetyczny. Suma tych liczb równa się osiemnaście, a suma kwadratów liczb skrajnych wynosi 104. Znajdź te liczby.

7.66. Znajdź czterowyrazowy ciąg arytmetyczny, jeśli:

a) iloczyn wyrazów równa się 105, a różnica ciągu wynosi 2;

b) iloczyn wyrazów skrajnych równa się 22, iloczyn wyrazów środkowych wynosi 40;

c) suma kwadratów wyrazów skrajnych równa się 29, a suma kwadratów wyrazów środkowych wynosi 25.

7.67. Miary kątów wielokąta tworzą ciąg arytmetyczny, którego różnica równa się 4° , a miara największego kąta wynosi 172° . Jaka jest liczba boków wielokąta?

7.68. Miary kątów wielokąta o n bokach tworzą ciąg arytmetyczny, którego pierwszy wyraz równa się 6° . Oblicz różnicę tego ciągu, jeśli:

a) $n = 3$;

b) $n = 4$;

c) $n = 9$.

7.69. Miary kątów wewnętrznych wielokąta wypukłego tworzą ciąg arytmetyczny, którego różnica wynosi 5° . Najmniejszy kąt ma miarę 120° . Wyznacz liczbę boków wielokąta.

7.70. Wyznacz ciąg arytmetyczny mający tę własność, że suma dowolnej liczby jego początkowych wyrazów jest równa czterokrotnemu kwadratowi liczby wziętych wyrazów.

7.71. Rowerzysta w ciągu pierwszej godziny przejechał 20 km, a w ciągu każdej następnej godziny odcinek o 0,75 km krótszy od poprzedniego. Jaką drogę pokonał rowerzysta, jeśli w ciągu ostatniej godziny przejechał 17 km?

7.72. Ile razy zegar, bijący tylko godziny, uderzy w ciągu doby?

7.73. Wykopanie pierwszego metra studni kosztuje 8 zł, a każdego następnego o 3 zł drożej.

a) Ile kosztuje wykopanie studni głębokości 25 m?

b) Wykopanie studni kosztowało 798 zł. Jaka była jej głębokość?

7.74. Pewien pan spłacił dług w wysokości 5100 zł w dwunastu ratach, z których każda była mniejsza od poprzedniej o 50 zł. Ile wynosiła pierwsza, a ile ostatnia rata?

7.75. Kiedy cesarz Karol V odwiedził w 1541 r. Norymbergę, miasto podarowało mu złoty puchar, w którym znajdowało się 100 sztuk złota. Pierwsza z nich miała wartość jednego dukata, druga – dwóch, trzecia – trzech itd., aż do setnej mającej wartość 100 dukatów. Jaką wartość przedstawiał dar, nie licząc pucharu?

7.76. Pan Nowak ulokował w banku kwotę 3000 zł na 7% w skali roku (procent prosty). Jaką sumę otrzyma po pięciu latach?

Uwaga: Procent prosty, to rodzaj oprocentowania lokaty pieniężnej polegający na tym, że odsetek nie dolicza się do kwoty podlegającej oprocentowaniu.

7.77. Przez pięć lat (na początku każdego roku) pan Nowak lokuje w banku po 3000 zł na 7% (procent prosty). Jaką sumę otrzyma po pięciu latach?

7.78. Pan Kozłowski złożył do banku 8000 zł, a po upływie pierwszego i każdego następnego roku wpłacał po 1000 zł. Ile lat oszczędzał pan Kozłowski, jeśli na koniec tego okresu na koncie było wraz z odsetkami (przed opodatkowaniem) 27290 zł. Przez cały czas oszczędzania oprocentowanie w banku wynosiło 4,5% (procent prosty).

7.79. Szósty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy zero. Oblicz S_{11} .

7.80. Udowodnij, że kwadraty wyrażeń: $x^2 - 2x - 1$, $x^2 + 1$ i $x^2 + 2x - 1$ w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny.

7.81. Dla jakich wartości x liczby: $3x + 1$, $2x - 4$, $5x + 3$ tworzą (w podanej kolejności) ciąg arytmetyczny?

7.82. Dla jakich wartości x liczby: $x^2 + 1$, $5x - 2$, $2x^2 + x + 1$ tworzą (w podanej kolejności) ciąg arytmetyczny?

7.83. Dla jakich wartości x liczby: $2x^2 - 5$, $x - 2$, $4x - x^3 + 4$ tworzą (w podanej kolejności) ciąg arytmetyczny?

7.84. Wykaż, że trzy wyrażenia $\frac{1+x}{1+y}$, $\frac{x+y}{2y}$, $\frac{x+y^2}{y+y^2}$ tworzą (w podanej kolejności) ciąg arytmetyczny, dla dowolnego $x \in \mathbf{R}$ i $y \in \mathbf{R} - \{0, -1\}$.

7.85. Miary trzech kolejnych kątów czworokąta wpisanego w koło tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 47° . Oblicz miary kątów tego czworokąta.

7.86. Udowodnij, że jeżeli trzy kolejne kąty czworokąta wpisanego w koło tworzą ciąg arytmetyczny, to co najmniej dwa kąty tego czworokąta są proste.

7.87. Udowodnij, że jeżeli długości trzech kolejnych boków czworokąta opisanego na okręgu tworzą ciąg arytmetyczny, to przynajmniej dwa boki tego czworokąta mają taką samą długość.

7.88. Długości trzech kolejnych boków czworokąta opisanego na okręgu tworzą ciąg arytmetyczny. Obwód tego czworokąta wynosi 28 cm. Długość najkrótszego boku stanowi $\frac{11}{17}$ długości największego boku. Oblicz długości boków czworokąta.

7.89. Miary kątów trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny. Obwód tego trójkąta wyraża się liczbą $6(\sqrt{3} + 1)$ cm. Oblicz długości boków tego trójkąta.

7.90. W piwnicy stoją dwie 77-litrowe beczki. Pierwsza jest wypełniona wodą, druga jest pusta. Z pierwszej beczki wypływają w pierwszej sekundzie 4 litry wody, a w każdej następnej o 0,2 litra mniej niż w poprzedniej. Równocześnie do drugiej beczki wlewa się w pierwszej sekundzie 1,5 litra wody, a w każdej następnej o 0,5 litra więcej niż w poprzedniej. Po ilu sekundach poziomy wody w obu naczyniach się wyrównają?

7.91. Z pełnej baryłki zaczęła wylewać się woda. W pierwszej sekundzie wypłynęło 3,4 litra wody, a w każdej następnej o 0,3 litra mniej niż w poprzedniej. W ostatniej sekundzie baryłka? wypłynęło tylko 0,1 litra wody. Ile czasu wypływała woda z baryłki? Jaką pojemność miała baryłka?

7.92. Wydajność pracy brygady budowlanej systematycznie malała między lipcem a grudniem (tzn. wartość produkcji tworzyła malejący ciąg arytmetyczny). Wydajność pracy w grudniu była o $26\frac{2}{3}\%$ mniejsza niż w lipcu. Wartość półrocznej produkcji wynosiła 390000 zł. Oblicz wartość produkcji w lipcu i w grudniu.

7.93. Współczynniki a , b i c równania $ax^2 + bx + c = 0$ tworzą ciąg arytmetyczny, którego suma wynosi 24. Jednym z rozwiązań tego równania jest $-\frac{1}{5}$. Znajdź drugie rozwiązanie.

7.94. Pola powierzchni prostokątnych kartek papieru tworzą ciąg arytmetyczny. Pole powierzchni pierwszej kartki wynosi 12 cm^2 , siódmej zaś 39 cm^2 . Wszystkie kartki pocięto na kawałki, które nałożono na kwadrat o boku długości $2,1 \text{ dm}$, zakrywając nimi całą powierzchnię kwadratu. Ile było kartek?

7.95. Wyznacz ciąg arytmetyczny, którego suma n pierwszych wyrazów jest równa $5n^2$, dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$.

*7.96. Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego równa się 1. Stosunek sumy m początkowych wyrazów tego ciągu do sumy n ($m \neq n$) początkowych wyrazów wynosi $m^2 : n^2$. Znajdź różnicę i wzór ogólny tego ciągu.

7.97. Udowodnij, że jeśli różne liczby a^2 , b^2 , c^2 tworzą ciąg arytmetyczny, to liczby $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$ też tworzą ciąg arytmetyczny.

*7.98. W ciągu arytmetycznym $a_p = \frac{1}{q}$ i $a_q = \frac{1}{p}$ ($p \neq q$). Znajdź sumę $p \cdot q$ wyrazów tego ciągu.

*7.99. Suma m początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego równa się n , natomiast suma n początkowych wyrazów ciągu równa się m ($m \neq n$). Znajdź sumę $m + n$ początkowych wyrazów ciągu.

Ciąg geometryczny

7.100. Wyznacz wzór ogólny ciągu geometrycznego:

a) $6, 12, 24, \dots$

d) $22, 2, 2, 0, 22, \dots$

b) $8, -4, 2, \dots$

e) $-\frac{1}{3}, -1, -3, \dots$

c) $\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \dots$

f) $-1\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{7}, \dots$

7.101. Wyznacz pierwszy wyraz ciągu geometrycznego a_1 , wiedząc, że:

a) $q = 5, a_7 = 125;$

d) $q = 3, a_8 = 10935;$

b) $q = \frac{1}{2}, a_{13} = \frac{1}{8192};$

e) $q = 6, a_4 = -151,2;$

c) $q = -\frac{2}{3}, a_6 = \frac{32}{27};$

f) $q = -0,2, a_5 = -0,192.$